Propiedades del producto de Matrices

Teorema 1. *Sean A,B,C tres matrices de ordenes tales que las operaciones indicadas tienen sentido. Sea k un escalar. Entonces*

a) $A(BC) = (AB)C$

b) $A(B + C) = AB + AC$

c) $(A + B)C = AC + BC$

d) $k(AB)=A(kB)$

e) $IA=A$

f) $0A=A0=0$

Demostración. a) Sea $A \in M_{m\times p}$, $B \in M_{p\times r}$ y $C \in M_{r\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix}, , \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

tomamos el k-ésimo renglon de la matriz B y lo multiplicamos por la j-ésima columna de C

$$b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + \cdots + b_{kr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} = \beta_{kj}$$

tenemos entonces que β_{kj} es un elemento de la matriz (BC) que vamos a multiplicar por el i-ésimo renglon de la matriz A

$$a_{i1}\beta_{ij} + a_{i2}\beta_{2j} + \cdots + a_{ip}\beta_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\beta_{kj} = \theta_{ij}$$

Entonces

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{r} a_{ik}b_{ks}c_{sj}$$

Por otra parte un elemento (AB)C se puede obtener multiplicando el i-ésimo renglon de A por la s-ésima columna de B

$$a_{i1}b_{1s} + a_{i2}b_{2s} + \cdots + a_{ip}b_{ps} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ks} = \alpha_{is}$$

esto lo vamos a multiplicar por la j-ésima columna de la matriz C

$$\alpha_{i1}c_{1j} + \alpha_{i2}c_{2j} + \cdots + \alpha_{ir}c_{rj} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}c_{sj} = \rho_{ij}$$

se tiene entonces

$$\rho_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ks}c_{sj} = \theta_{ij}$$

b) Sea $A \in M_{m\times p}$, $B \in M_{p\times n}$ y $C \in M_{p\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que

$$B + C = (b_{ij} + c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}} = (d_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}} \quad y \quad A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p}}$$

por lo que el producto será

$$\begin{aligned} A(B+C) &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} d_{kj}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

c) $A \in M_{p\times n}$, $B \in M_{p\times n}$ y $C \in M_{n\times m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}} = (d_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}} \quad y \quad C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$$

por lo que el producto será

$$\begin{aligned}
(A+B)C &= \left(\sum_{k=1}^{n} d_{ik}c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,m}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}+b_{ik})c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,m}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj})\right)_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,m}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,m}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} + \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \\
&= AC+BC
\end{aligned}$$

d) Ejercicio

e) Ejercicio

f) Ejercicio

$\square$

Matrices especiales

Matriz inversa Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Se quiere determinar bajo qué condiciones esta matriz es inversible y, en tal caso, obtener una fórmula para su inversa.
Se quiere entonces hallar una matriz

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al hacer la multiplicación indicada e igualando los elementos correpondientes, se obtiene el par de sistemas de dos ecuaciones con 2 incognitas

$$\begin{cases} ax_1 + bx_3 = 1 \\ cx_1 + dx_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_2 + bx_4 = 0 \\ cx_2 + dx_4 = 1 \end{cases}$$

Éste sistema tiene solución si $ad - bc \neq 0$, en cuyo caso

$$x_1 = \frac{d}{ad-bc}, \quad x_3 = \frac{-c}{ad-bc}, \quad x_2 = \frac{-b}{ad-bc}, \quad x_4 = \frac{a}{ad-bc}$$

De tal manera, entonces, si $ad - bc \neq 0$, la matriz A es inversible y su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

En este caso tenemos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

También

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$$