Matrices especiales

Matriz traspuesta Sea $A \in M_{m\times n}$, se llama matriz traspuesta de A, denotada A^t, a la matriz

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}}$$

es decir si $A \in M_{m\times n}$ entonces $A^t \in M_{n\times m}$

1. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Las matrices traspuestas tienen especial importancia para matrices cuadradas.
Algunas de sus propiedades son

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$

Demostración. a) Si $A \in M_{m\times n}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(A^t)^t &= \left(\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\right)^t\right)^t \\
&= \left((a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}}\right)^t \\
&= (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \\
&= A
\end{aligned}$$

b) Si $A \in M_{m\times n}$ y $B \in M_{m\times n}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(A+B)^t &= \left((a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\right)^t \\
&= (a_{ji}+b_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}} \\
&= (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}} + (b_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}} \\
&= A^t + B^t
\end{aligned}$$

c) Si $A \in M_{m\times n}$ y $B \in M_{n\times p}$ tenemos que

$$\begin{aligned}(AB)^t &= \left(\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}\right)^t\\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki}\right)_{\substack{j=1,\dots,p\\ i=1,\dots,m}}\\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk}\right)_{\substack{j=1,\dots,p\\ i=1,\dots,m}}\\ &= B^tA^t\end{aligned}$$

□

Operaciones elementales de una matriz Dada una matriz $A \in M_{m\times n}$ se pueden realizar las siguientes operaciones elementales

a) Intercambiar dos renglones (columnas)

b) Multiplicar un renglon (columna) por un número real distinto de cero

c) Sumar a un renglon (columna) un multiplo real de otro renglon (columna)

Ejemplo Dado el sistema

$$\begin{gathered}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2\\ \dots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m\end{gathered}$$

Se asocia a éste la matriz A (de orden $m \times n$) de sus coeficientes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

llamada matriz de coeficientes (o matriz del sistema), así como la matriz $m \times (n+1)$.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$$

La misma matriz A con una última columna añadida, la de los términos independientes, llamada matriz aumentada de coeficientes (o del sistema).

Ejemplo Supóngase que se tiene la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Se hace que el primer elemento distinto de cero de la primera línea sea 1. Esto es posible multiplicando por $\dfrac{1}{3}$ tal línea. Sin embargo, se puede intercambiar primeramente la primera y segunda líneas (pues esta línea comienza ya con 1). Se obtiene la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

La siguiente etapa es, por medio de sustituir líneas por ellas mismas más múltiplos de otras, hacer ceros en las posiciones restantes de la columna debajo del 1 logrado esto es:

$$L_2 \to L_2 - 3L_1, \quad L_3 \to L_3 - 2L_1, \quad L_4 \to L_4 - 4L_1$$

Se obtiene la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Se realiza ahora lo siguiente

$$L_3 \to L_3 - 3L_2$$

obteniendose

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Se realiza ahora

$$L_3 \to -\frac{1}{11}L_3$$

para lograr un 1 como primer elemento no nulo de la tercera línea

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Se hace ahora

$$L_4 \to L_4 - 5L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{54}{11} & \frac{54}{11} \end{bmatrix}$$

Para obtener un 1 como primer elemento no nulo de la cuarta línea se realiza

$$L_4 \to \frac{11}{54} L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que esta matriz se encuentra ya en forma escalonada. Para llegar a la forma escalonada reducida, se comienza con el último uno logrado (en el paso anterior) y se procede a volver ceros las posiciones restantes (éncima de él).
Para esto se realiza

$$L_1 \to -L_1 + 3L_4, \quad L_2 \to L_2 - 10L_4, \quad L_3 \to L_3 - \frac{20}{11} L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora con el siguiente uno se hace lo mismo: se realiza

$$L_1 \to L_1 + L_3, \quad L_2 \to L_2 - 5L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente se hace

$$L_1 \to L_1 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y el sistema que representa esta matriz es entonces $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 1$ que es la solución del sistema.