Matrices Elementales

Definición 1. *Se dice que la matriz E de orden n es una matriz elemental si ella puede obtenerse, a partir de la matriz identidad I_n realizando una de las siguientes operaciónes elementales*
Operaciones elementales de una matriz
(1) Intercambiar dos renglones (columnas)
(2) Multiplicar un renglon (columna) por un número real distinto de cero
(3) Sumar a un renglon (columna) un multiplo real de otro renglon (columna)

Ejemplo Tenemos que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1+(3)R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz elemental, pues se obtuvo partiendo de I_3, sustituyendo en ésta su primera línea por ella misma más tres veces su tercera línea

Ejemplo Tenemos que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz elemental, pues se obtuvo partiendo de I_2, intercambiando sus líneas

Ejemplo Tenemos que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2(8)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

es una matriz elemental, pues se obtuvo partiendo de I_2, multiplicando por 8 su segunda línea

Ejemplo Tenemos que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz elemental, pues se obtuvo partiendo de I_3, intercambiando su primera y tercera línea

Consideremos ahora la matriz A de orden 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sea E_1 la matriz elemental que provino de I_3 intercambiando su primera y tercera líneas, tenemos entonces

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Observe que el resultado es la matriz que proviene de A intercambiando su primera y tercera líneas Consideremos ahora la matriz A de orden 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sea E_2 la matriz elemental que provino de I_3 sustituyendo su segunda línea por ella más k-veces su tercera línea tenemos entonces

$$E_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{33}+ka_{31} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Observe que el resultado es la matriz que proviene de A sustituyendo su segunda línea por ella más k-veces su tercera línea Consideremos ahora la matriz A de orden 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sea E_3 la matriz elemental que provino de I_3 multiplicando por $c \neq 0$ su tercera línea, tenemos entonces

$$E_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$$

Observe que el resultado es la matriz que proviene de A multiplicando por $c \neq 0$ su tercera línea.
Como conclusión se ve que al multiplicar por la izquierda la matriz A por la matriz elemental E_i se obtiene la matriz que resulta de A al realizar en ésta la misma operación elemental que se realizó en I_3 para obtener E_i $(i = 1, 2, 3)$

Teorema 1. *Si E es una matriz elemental, entonces E es inversible. Su inversa es también una matriz elemental*

Demostración. Siendo E es una matriz elemental, E provino de I realizando en ésta una operación elemental. Sea E' la matriz elemental que proviene de I realizando en ésta la operación elemental inversa. Se tiene $E'E = I$.
Un argumento similar aplicado a la matriz elemental E', muestra que existe una matriz elemental E'' tal que $E''E' = I$.
De lo anterior

$$E'E = I = E''E'$$

se concluye que $E = E''$.
Se ha probado que $E'E = EE' = I$, esto es, que E es inversible y que su inversa E' es tambien una matriz elemental □

Lema 1. *Sea A una matriz de orden n. Si el sistema homogéneo de ecuaciones*

$$AX = 0$$

tiene sólo la solución trivial, entonces A es equivalente a la matriz identidad I_n

Demostración. Tenemos que $AX = 0$ es equivalente al sistema $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ cuya matriz (la matriz del sistema) es I_n. Lo cual significa que partiendo de A, por medio de operaciones elementales, se puede llegar a I_n. □

Teorema 2. *Las siguientes afrimaciones acerca de la matriz A de orden n son equivalentes:*
(1) A es inversible
(2) A es equivalente a la matriz identidad I_n

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Si A es inversible, según los resultados anteriores, el sistema homogéneo de ecuaciones $AX = 0$ tiene solo la solución trivial. Entonces, según el lema anterior, A es equivalente a I_n
(2) $\Rightarrow$ (1): Que A es equivalente a la matriz identidad I_n significa que, partiendo de A y realizando en ella operaciones elementales, se puede llegar (dígase que después de r pasos) a I. Existen entonces matrices elementales $E_1, E_2, ..., E_r$ tales que

$$E_1A = A_1, \quad , E_2A_1 = A_2, ..., E_rA_{r-1} = I$$

Estas expresiones nos llevan a

$$(E_r...E_2E_1)A = I$$

Siendo $E_1, E_2, ..., E_r$ inversibles, se puede presentar la expresión anterior como

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}...E_r^{-1}$$

Entonces A es un producto de matrices inversibles. Es por tanto inversible □

Ejemplo Consideremos las matrices

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_1(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_2+(-3)R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{(\frac{1}{4})R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1+R_2(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora aplicaremos las mismas operaciones a la matriz identidad I_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{hacemos} \quad E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2+(-3)R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{hacemos} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{(\frac{1}{4})R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \textit{hacemos} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1+R_2(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{hacemos} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resulta que

$$E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Mientras que

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1}$$

esto es

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = A$$