

Forma Escalón Reducida

Definición 1. Se dice que la matriz A está en la forma escalonada reducida si en ella se cumplen las siguientes 4 condiciones:

- (1) Si la matriz posee alguna o algunas líneas que consten exclusivamente de ceros, éstas se encuentran concentradas en la parte inferior de la matriz
- (2) Para cada línea de la matriz que no consta exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero (leyendo de izquierda a derecha) de tal línea es 1.
- (3) Para cada dos líneas consecutivas que no constan exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero de la línea superior se encuentra a la izquierda del primer elemento distinto de cero de la línea a la que precede.
- (4) Cada columna que contiene un primer elemento distinto de cero de alguna línea, tiene en las posiciones restantes 0.

Si la matriz A satisface las condiciones (1), (2), (3) pero no la (4), se dice que ésta se encuentra en la forma escalonada

Ejemplo Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

se encuentran en la forma escalonada.

La propiedad que más importante que posee una matriz en la forma escalonada reducida es que si ésta representa la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, las soluciones de éste pueden leerse muy fácilmente.

Ejemplo Suponga que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

representa la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, de modo que atendiendo a la correspondencia entre matrices y sistemas de ecuaciones establecida anteriormente, se ve que el sistema correspondiente es:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 4 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= -2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 &= 4 \end{aligned}$$

o sea, $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$. Las soluciones están dadas, pues, en la misma matriz.

Método de Eliminación Gaussiana

Dado el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

del cual se quieren conocer sus soluciones, se escribe la matriz aumentada asociada al sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se debe llevar por medio de operaciones elementales en sus líneas, a la forma escalonada reducida. El sistema que representa esta nueva matriz tiene las mismas soluciones que el sistema original.

Ejemplo Supóngase que se tiene la matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc} 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

Se hace que el primer elemento distinto de cero de la primera línea sea 1. Esto es posible multiplicando por $\frac{1}{3}$ tal línea. Sin embargo, se puede intercambiar primeramente la primera y segunda líneas (pues esta línea comienza ya con 1). Se obtiene la matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

La siguiente etapa es, por medio de sustituir líneas por ellas mismas más múltiplos de otras, hacer ceros en las posiciones restantes de la columna debajo del 1 logrado esto es:

$$L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1, \quad L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1, \quad L_4 \rightarrow L_4 - 4L_1$$

Se obtiene la matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array} \right]$$

Se realiza ahora lo siguiente

$$L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2$$

obteniéndose

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Se realiza ahora

$$L_3 \rightarrow -\frac{1}{11}L_3$$

para lograr un 1 como primer elemento no nulo de la tercera línea

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Se hace ahora

$$L_4 \rightarrow L_4 - 5L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{54}{11} & \frac{54}{11} \end{bmatrix}$$

Para obtener un 1 como primer elemento no nulo de la cuarta línea se realiza

$$L_4 \rightarrow \frac{11}{54}L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que esta matriz se encuentra ya en forma escalonada. Para llegar a la forma escalonada reducida, se comienza con el último uno logrado (en el paso anterior) y se procede a volver ceros las posiciones restantes (éncima de él).

Para esto se realiza

$$L_1 \rightarrow -L_1 + 3L_4, \quad L_2 \rightarrow L_2 - 10L_4, \quad L_3 \rightarrow L_3 - \frac{20}{11}L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Ahora con el siguiente uno se hace lo mismo: se realiza

$$L_1 \rightarrow L_1 + L_3, \quad L_2 \rightarrow L_2 - 5L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente se hace

$$L_1 \rightarrow L_1 + L_2$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y el sistema que representa esta matriz es entonces $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$ que es la solución del sistema.