Divisibilidad de polinomios

Definición 1. *Sea K un campo y sean $f(x), g(x) \in K[x]$. Diremos que $f(x)$ divide a $g(x)$ y lo denotaremos $f(x)\big|g(x)$, si existe $h(x) \in K[x]$ tal que $f(x)h(x) = g(x)$*

Ejemplo Tenemos que

$$x^2 + 1 \mid 3x^7 + 3x^5 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1$$

ya que

$$\left(x^2 + 1\right)\left(3x^5 + 2x - 1\right) = 3x^7 + 3x^5 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1 \quad en \quad \mathbb{Q}[x]$$

Ejemplo Tenemos que

$$\sqrt{2}x^3 + \pi x^2 - \sqrt{5} \mid 2x^4 + (\pi + 1)\sqrt{2}x^3 + \pi x^2 - \sqrt{10}x - \sqrt{5}$$

ya que

$$\left(\sqrt{2}x^3 + \pi x^2 - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right) = 2x^4 + (\pi + 1)\sqrt{2}x^3 + \pi x^2 - \sqrt{10}x - \sqrt{5} \ \ en \ \mathbb{R}[x]$$

Ejemplo Tenemos que

$$x + (i + 1) \mid x^2 + 2x + 2$$

ya que

$$(x + (i + 1))\,(x - (i - 1)) = x^2 + 2x + 2 \ \ en \ \mathbb{C}[x]$$

Teorema 1. *Sean $f(x), g(x)$ y $h(x)$ polinomios en $K[x]$. Entonces*

1. *$a\big|f(x)$ para toda $a \in K - \{0\}$*
2. *Si $f(x)\big|g(x)$, entonces $a\,f(x)\big|b\,g(x)$ para cualesquiera $a \in K - \{0\}$ y $b \in K$. En particular $f(x)\big|f(x)$ y $f(x)\big|0$*
3. *Si $f(x)\big|g(x)$ y $g(x)\big|h(x)$, entonces $f(x)\big|h(x)$*
4. *Si $f(x)\big|g(x)$ y $f(x)\big|h(x)$, entonces $f(x)\big|r(x)g(x) + s(x)h(x)$ para cualesquiera $r(x), s(x) \in K[x]$. En particular $f(x)\big|g(x) + h(x)$*
5. *Si $0\big|f(x)$, entonces $f(x) = 0$. Esto es, el único polinomio que es divisible por 0 es el polinomio cero.*
6. *Si $f(x)\big|g(x)$ y $g(x) \neq 0$, entonces $f(x) \neq 0$ y $\partial f(x) \leq \partial g(x)$*
7. *Si $f(x)\big|g(x)$ y $g(x)\big|f(x)$, entonces $f(x) = a\,g(x)$ para alguna $a \in K - \{0\}$*

Demostración. 1. Dado que $f(x) = a\dfrac{f(x)}{a}$, haciendo $h(x) = \dfrac{f(x)}{a}$ se tiene que $h(x) \in K[x]$ y $a\ h(x) = f(x)$ por lo tanto $a\big|f(x)$ para todo $a \in K - \{0\}$

2. Si $f(x)\big|g(x)$ entonces existe $h(x) \in K[x]$ tal que $f(x)h(x) = g(x)$ por lo que

$$\begin{aligned} f(x)h(x) = g(x) &\Rightarrow a\ f(x)\left(h(x)\ \frac{b}{a}\right) = b\ g(x) \\ &\Rightarrow a\ f(x)\ r(x) = a\ g(x) \quad \textit{donde} \ \ r(x) = h(x)\ \frac{b}{a} \\ &\Rightarrow a\ f(x)\big|b\ g(x) \end{aligned}$$

3. Si $f(x)\big|g(x)$ entonces existe $r(x) \in K[x]$ tal que $f(x)r(x) = g(x)$
   Si $g(x)\big|h(x)$ entonces existe $s(x) \in K[x]$ tal que $g(x)s(x) = h(x)$ por lo que

$$\begin{aligned} f(x)r(x) = g(x) &\Rightarrow f(x)r(x)s(x) = g(x)s(x) = h(x) \\ &\Rightarrow f(x)r(x)s(x) = h(x) \\ &\Rightarrow f(x)t(x) = h(x) \quad \textit{donde} \ \ t(x) = r(x)s(x) \in K[x] \\ &\Rightarrow f(x)\big|h(x) \end{aligned}$$

4. Si $f(x)\big|g(x)$ entonces existe $r_1(x) \in K[x]$ tal que $f(x)r_1(x) = g(x)$ lo cual implica que

$$f(x)r_1(x)r(x) = g(x)r(x)$$

   Si $f(x)\big|h(x)$ entonces existe $s_1(x) \in K[x]$ tal que $f(x)s_1(x) = h(x)$ lo cual implica que

$$f(x)s_1(x)s(x) = h(x)s(x)$$

   por lo que

$$\begin{aligned} f(x)r_1(x)r(x) + f(x)s_1(x)s(x) = g(x)r(x) + h(x)s(x) &\Rightarrow f(x)(r_1(x)r(x) + s_1(x)s(x)) = g(x)r(x) + h(x)s(x) \\ &\Rightarrow f(x)(t(x)) \underbrace{=}_{t(x)=r_1(x)r(x)+s_1(x)s(x)\in K[x]} g(x)r(x) + h(x)s(x) \\ &\Rightarrow f(x)\big|g(x)r(x) + h(x)s(x) \end{aligned}$$

5. Si $0\big|f(x)$ entonces existe $h(x) \in K[x]$ tal que $0 = 0\ h(x) = f(x)$ por tanto $f(x) = 0$

6. Si $f(x)\big|g(x)$ entonces $f(x)r(x) = g(x)$ para algún $r(x) \in K[x]$ y como $g(x) \neq 0$, debe ser $f(x) \neq 0$ y $r(x) \neq 0$. Tomando grados, tenemos que

$$\partial f(x) + \partial r(x) = \partial g(x)$$

   ya que $\partial r(x) \geq 0$, entonces

$$\partial f(x) \leq \partial g(x)$$

7. Si alguno de los polinomios $f(x)$ o $g(x)$ es cero, automáticamente el otro lo es y la igualdad se cumple trivialmente, así que suponemos que $g(x) \neq 0 \neq f(x)$ y sean $r(x)$ y $s(x)$ en $k[x]$ tales que

$$f(x)r(x) = g(x) \quad y \quad g(x)s(x) = f(x)$$

Entonces de estas dos igualdades obtenemos

$$g(x)s(x)r(x) = g(x)$$

por lo que $\partial(r(x)s(x)) = \partial r(x) + \partial s(x) = 0$ y de aquí se debe tener $s(x)$, $r(x)$ son polinomios constantes distintos de cero y por lo tanto

$$f(x) = a\ g(x), \quad donde\ a = s(x) \in K[x]$$

$\square$