Raíces de polinomios

Definición 1. *Sea* $f(x) \in K[x]$ *y* $\alpha \in K$. α *es una raíz de* $f(x)$ *si* $f(\alpha) = 0$

Ejemplo En $\mathbb{Z}[x]$. Sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \in \ \mathbb{Z}[x]$$

y sea $\dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ una raíz de $f(x)$ con $(r, s) = 1$. Se tiene entonces que

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = 0$$

es decir

$$a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-2} + \cdots + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0$$

por lo que

$$a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-2} + \cdots + a_1\left(\frac{r}{s}\right) = -a_0$$

Multiplicando ambos miembros por s^n se tiene

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}s^1 + a_{n-1}r^2 s^2 + a_{n-3}r^{n-3}s^3 + \cdots + a_1 r s^{n-1} = -a_0 s^n$$

esto quiere decir que

$$s \ \Big| \ a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}s^1 + a_{n-1}r^2 s^2 + a_{n-3}r^{n-3}s^3 + \cdots + a_1 r s^{n-1}$$

y como

$$s \ \Big| \ a_{n-i}r^{n-i}s^i \quad \forall \ i = 1, ..., n-1$$

entonces debe ocurrir

$$s \ \Big| \ a_n r^n$$

al tener que $(r, s) = 1$ entonces $s \ \big| \ a_n$.
Ahora bien, de la igualdad

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}s^1 + a_{n-1}r^2 s^2 + a_{n-3}r^{n-3}s^3 + \cdots + a_1 r s^{n-1} = -a_0 s^n$$

tenemos también

$$r \cdot \left[a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2}s^1 + a_{n-2}r^{n-3}s^2 + a_{n-3}r^{n-4}s^3 + \cdots + a_1 s^{n-1}\right] = -a_0 s^n$$

esto quiere decir también que

$$r \ \Big| \ -a_0 s^n$$

al tener que $(r, s) = 1$ entonces $r \ \big| \ a_0$.
Concluimos entonces que:
Dados un polinomio $f(x)$ de coeficientes enteros y un número racional $\alpha = \dfrac{r}{s}$ con $(r, s) = 1$, si α es raíz de $f(x)$ entonces α divide al término independiente.
En particular si $s = 1$ entonces $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo Sea $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 2$

1. Considerando $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $f(x)$ tiene sólo una raíz en $\mathbb{Q}$ que es $\alpha_1 = -1$
2. Considerando $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $f(x)$ tiene tres raíces en $\mathbb{R}$ que son $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$ y $\alpha_3 = -\sqrt{2}$
3. Considerando $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $f(x)$ tiene cinco raíces en $\mathbb{C}$ que son $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$, $\alpha_3 = -\sqrt{2}$, $\alpha_4 = i$ y $\alpha_5 = -i$

Debido a que no existe un método general para encontrar las raíces de un polinomio de grado $n \geq 5$, hay algunos resultados que nos proporcionan información importante acerca de las raíces de un polinomio que nos puede ayudar, en algunos casos a encontrarlas

Teorema del Factor y Teorema del Residuo

Teorema 1. *Sea $f(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K$. Entonces*

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

para algún polinomio $q(x) \in K[x]$

Demostración. Aplicando el algoritmo de la división a los polinomios $f(x)$ y $(x - \alpha)$ obtenemos

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x), \quad \textit{donde} \quad r(x) = 0 \quad o \quad \partial\, r(x) < \partial\, (x - \alpha) = 1$$

y por lo tanto $r(x)$ es un elemento r de K. Evaluando $f(x)$ en α tenemos que

$$f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$$

es decir,

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

□

Corolario 1. *Un elemento α de K es una raíz de un polinomio $f(x) \in K[x]$ si y sólo si $(x - \alpha) \mid f(x)$*

Demostración. Como

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

para algún polinomio $q(x) \in K[x]$, entonces $(x - \alpha) \mid f(x)$ si y sólo si $f(\alpha) = 0$ □

Dado el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

vamos a comprobar que tiene a lo mas n raíces.
Sea α_1 una raíz del polinomio $f(x)$, según lo anterior

$$x - \alpha_1 \mid f(x) \;\Rightarrow\; f(x) = (x - \alpha_1) q_1(x) \quad \textit{donde} \quad \partial\, q_1(x) < \partial\, f(x)$$

en este caso $\partial\, q_1(x) = n - 1$. Ahora bien si α_2 también es raíz del polinomio $f(x)$ entonces

$$q_1(x) = (x - \alpha_2) q_2(x) \quad \textit{donde} \quad \partial\, q_2(x) < \partial\, q_1(x)$$

en este caso $\partial\ q_2(x) = n - 2$ de donde

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x)$$

Ahora bien si α_3 también es raíz del polinomio $f(x)$ entonces

$$q_2(x) = (x - \alpha_3)q_3(x) \ \ donde \ \ \partial\ q_3(x) < \partial\ q_2(x)$$

en este caso $\partial\ q_3(x) = n - 3$ de donde

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)q_3(x)$$

Continuando de esta manera si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son raíces de $f(x)$, entonces

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)q_n(x)$$

donde $\partial\ q_n(x) = n - n = 0$ es decir, es una constante. Por consiguiente no es posible que $f(x)$ tenga otra raíz