Raíces de polinomios (continuación)

Las raíces racionales $\dfrac{p}{q}$ de un polinomio con coeficientes enteros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

y $a_0 \neq 0$ son tales que p es divisor de de a_0 y q es divisor de a_n

Ejemplo Encontrar las raíces racionales del polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

Solución Los divisores del término independiente son:

$$p : 1 \ \ -1, \ 2, \ \ -2, \ 5, \ \ -5, \ 10, \ \ -10$$

Los divisores del coeficiente principal son:

$$q : \ 1, \ \ -1, \ 2, \ \ -2$$

Consideramos todos los posibles cocientes de la forma $\dfrac{p}{q}$

$$1, \ \ -1, \ \frac{1}{2}, \ \ -\frac{1}{2}, \ 2, -2, \ 5, \ \ -5, \ \frac{5}{2}, \ \ -\frac{5}{2}, \ 10, \ \ -10$$

Para determinar cuales son raíz evaluamos

1. $P(1) = 0$
2. $P(-1) = 14$
3. $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 5$
4. $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{27}{2}$
5. $P\left(2\right) = -4$
6. $P\left(-2\right) = 0$
7. $P\left(5\right) = 140$
8. $P\left(-5\right) = 270$
9. $P\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$
10. $P\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{35}{2}$
11. $P\left(10\right) = 1620$
12. $P\left(-10\right) = -2200$

en este caso las raíces son

$$r_1 = 1,\ r_2 = -2,\ r_3 = \frac{5}{2}$$

podemos entonces escribir

$$2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = (x-1)(x+2)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

Las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Teorema 1. *Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y si $z = a + ib$ es una raíz de P entonces el número complejo conjugado $\overline{z} = a - ib$ también es una raíz de P*

Demostración. Consideremos

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

como z es una raíz, entonces

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

tomando conjugados

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0} = 0$$

usando las propiedades de conjugación de números complejos tenemos

$$a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

es decir $P(\overline{z}) = 0$ y entonces $\overline{z}$ también es raíz del polinomio □

Como consecuencia de este resultado tenemos:
Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado impar entonces tiene al menos una raíz real.

Regla de los signos de Descartes

Si $P(x)$ es un polinomio, escrito en orden descendentes y con término independiente distinto de cero:

1. El número de raíces positivas de $P(x)$ es igual al número de cambios de signo de los coeficientes del polinomio.

2. El número de raíces negativas de $P(x)$ es igual al número de cambios de signo de los coeficientes del polinomio $P(-x)$.

Ejemplo Determina el número de raíces positivas y negativas del polinomio

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 12x - 4$$

Solución En este caso

$$P(x) = \underbrace{2x^4 + 3x^3}_{\textit{no hay cambio de signo}} -7x^2 - 12x - 4$$

$$P(x) = 2x^4 \underbrace{+3x^3 - 7x^2}_{\textit{hay cambio de signo}} -12x - 4$$

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 \underbrace{-7x^2 - 12x}_{\textit{no hay cambio de signo}} -4$$

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 \underbrace{-12x - 4}_{\textit{no hay cambio de signo}}$$

Concluimos que para $x > 0$ se tiene un sólo cambio de signo y por tanto sólo una raíz positiva. Por otro lado

$$P(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^3 - 7(-x)^2 - 12(-x) - 4 = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 12x - 4$$

en este caso

$$P(x) = \underbrace{2x^4 - 3x^3}_{\textit{hay cambio de signo}} -7x^2 - 12x - 4$$

$$P(x) = 2x^4 \underbrace{-3x^3 - 7x^2}_{\textit{no hay cambio de signo}} -12x - 4$$

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 \underbrace{-7x^2 + 12x}_{\textit{hay cambio de signo}} -4$$

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 \underbrace{+12x - 4}_{\textit{hay cambio de signo}}$$

Concluimos que para $x < 0$ se tienen tres cambios de signo y por tanto se tienen tres raíces negativas. Ahgora bien, para hallar las raíces racionales tenemos que

1. Los divisores del término independiente a_0 son

$$p: \ \pm 1 \ , \pm 2 \ , \pm 4$$

2. Los divisores del coeficiente principal a_n son

$$q \ \pm 1 \ , \pm 2$$

Por tanto para hallar las raíces racionales $\dfrac{p}{q}$ se considera el conjunto

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 2, -2, 4, -4$$

Evaluando se encontro que

1. $P(1) = 0$

2. $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$
3. $P\left(-2\right)=0$
4. $P\left(-1\right)=0$

por lo tanto se tiene

$$P(x)=2x^4+3x^3-7x^2-12x-4=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)(x+1)$$