Aproximación de Raíces irracionales de polinomios

Ejemplo Encontrar las raíces del polinomio

$$P(x) = x^4 - x^2 - 2$$

Solución Tenemos que $P(x)$ tiene un cambio de signo, por lo que el polinomio tiene exactamente una raíz real positiva.

Ahora calculamos
$$P(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 - 2 = x^4 - x^2 - 2$$

en este caso Tenemos que $P(-x)$ tiene un cambio de signo por lo que el polinomio tiene exactamente una raíz negativa.

Ahora bien, como los divisores del término independiente son

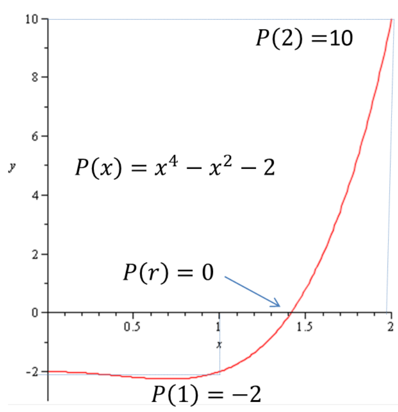
$$\pm 1, \ \pm \ 2$$

evaluamos el polimonio en estos números

1. $P(1) = -2$
2. $P(-1) = -2$
3. $P(2) = 10$
4. $P(-2) = 10$

y observamos entonces que el polinomio no tiene raíces racionales.

Por otro lado observamos que $P(1) = -2$ y $P(2) = 10$, entonces puesto que la gráfica de un polinomio es una función continua, debe existir $r \in [1, 2]$ tal que $P(x) = 0$



Llamamos x_1 al punto medio del intervalo $[1, 2]$ entonces

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

Evaluamos el polinomio en este punto

$$P(1{,}5) = (1{,}5)^4 - (1{,}5)^2 - 2 = 0{,}81$$

como 0,81 es positivo, se tiene $P(1) = -2$ y $P(1{,}5) = 0{,}81$.

1	1.5	2
-	+	+

Sigue habiendo un cambio de signo, por lo que ahora consideramos el intervalo $[1, 1{,}5]$.
Llamamos x_2 al punto medio del intervalo $[1, 1{,}5]$ entonces

$$x_2 = \frac{1 + 1{,}5}{2} = 1{,}25$$

Evaluamos el polinomio en este punto

$$P(1{,}375) = (1{,}25)^4 - (1{,}25)^2 - 2 = -1{,}121$$

como $-1{,}121$ es negativo, se tiene $P(1) = -2$ y $P(0{,}81) = -1{,}121$.

1	1.25	1.5
-	-	+

Ya no hay un cambio de signo.
Tenemos que $P(1{,}25) = -1{,}121$ y $P(1{,}5) = 0{,}81$, por lo que ahora consideramos el intervalo $[1{,}25, 1{,}5]$.
Llamamos x_3 al punto medio del intervalo $[1{,}25, 1{,}5]$ entonces

$$x_3 = \frac{1{,}25 + 1{,}5}{2} = 1{,}375$$

Evaluamos el polinomio en este punto

$$P(1{,}375) = (1{,}375)^4 - (1{,}375)^2 - 2 = -0{,}316$$

como $-0{,}316$ es negativo, se tiene $P(1{,}25) = -1{,}121$ y $P(1{,}375) = -0{,}316$.

1.25	1.375	1.5
-	-	+

Ya no hay un cambio de signo.
Tenemos que $P(1{,}375) = -0{,}316$ y $P(1{,}5) = 0{,}81$, por lo que ahora consideramos el intervalo $[1{,}375, 1{,}5]$.
Llamamos x_4 al punto medio del intervalo $[1{,}375, 1{,}5]$ entonces

$$x_4 = \frac{1{,}375 + 1{,}5}{2} = 1{,}437$$

Evaluamos el polinomio en este punto

$$P(1{,}437) = (1{,}437)^4 - (1{,}437)^2 - 2 = 0{,}199$$

como 0,199 es positivo, se tiene $P(1{,}375) = -0{,}316$ y $P(1{,}437) = 0{,}199$.

1.375	1.437	1.5
-	+	+

hay un cambio de signo.
Por lo que ahora consideramos el intervalo $[1{,}375, 1{,}437]$.
Llamamos x_5 al punto medio del intervalo $[1{,}375, 1{,}437]$ entonces

$$x_5 = \frac{1{,}375 + 1{,}437}{2} = 1{,}406$$

Evaluamos el polinomio en este punto

$$P(1{,}406) = (1{,}406)^4 - (1{,}406)^2 - 2 = -0{,}068$$

como $-0{,}068$ es negativo, se tiene $P(1{,}375) = -0{,}316$ y $P(1{,}406) = -0{,}068$.

1.375	1.406	1.437
-	-	+

No hay un cambio de signo.
Por lo que ahora consideramos el intervalo $[1{,}406, 1{,}437]$.
Las aproximaciones son

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1{,}5\\
x_2 &= 1{,}25\\
x_3 &= 1{,}375\\
x_4 &= 1{,}437\\
x_5 &= 1{,}406
\end{aligned}$$

Si queremos una mejor aproximación podemos continuar con el mismo procedimiento.
Para encontrar el valor aproximado de la raíz negativa, procedemos de manera similar empezando con el intervalo $[-2, -1]$