

Relaciones binarias

Definición 1. Una relación binaria R de A en B es un subconjunto de $A \times B$ de parejas ordenadas.

Por tanto si R es una relación binaria entre A y B , R es un conjunto de pares ordenados cuyas primeras coordenadas son elementos de A y las segundas coordenadas son elementos de B . Así, para indicar que un par ordenado pertenece a la relación suele escribirse

$$(a, b) \in R \quad \text{o} \quad a R b$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$ descritos en la relación

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

Solución En este caso

$$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 3), (0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3)\}$$

por lo que

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$B = \{1, 3\} \quad C = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right\}$$

Hallar los elementos de $B \times C$ descritos en la relación

$$S = \left\{ (b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1 \right\}$$

Solución En este caso

$$B \times C = \left\{ \left(1, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{5}{2}\right), (1, 0), \left(3, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right), (3, 0) \right\}$$

por lo que

$$S = \left\{ \left(1, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right) \right\}$$

Definición 2. El dominio de una relación $R \subseteq A \times B$, denotado $\text{dom}(R)$, es el conjunto de elementos $x \in A$ que están relacionados con algún $y \in B$, es decir

$$\text{dom}(R) = \{x \in A \mid \exists b \in B, \text{ tal que } (a, b) \in R\}$$

$$\text{dom}(R) = \{x \in A \mid \exists b (b \in B \wedge (a, b) \in R)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$ descritos en la relación

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

Solución En este caso

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

y entonces

$$\text{dom}(R) = \{-1, 1\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$B = \{1, 3\} \quad C = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right\}$$

Hallar los elementos de $B \times C$ descritos en la relación

$$S = \left\{ (b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1 \right\}$$

Solución En este caso

$$S = \left\{ \left(1, \frac{3}{2} \right), \left(3, \frac{5}{2} \right) \right\}$$

y entonces

$$\text{dom}(S) = \{1, 3\}$$

Definición 3. La imagen o rango de una relación $R \subseteq A \times B$, denotado $\text{im}(R)$, es el conjunto de elementos $b \in B$ que están relacionados con algún $a \in A$, es decir

$$\text{im}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A, \text{ tal que } (a, b) \in R\}$$

$$\text{im}(R) = \{b \in B \mid \exists a (a \in A \wedge (a, b) \in R)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$ descritos en la relación

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

Solución En este caso

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

y entonces

$$\text{im}(R) = \{1\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$B = \{1, 3\} \quad C = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right\}$$

Hallar los elementos de $B \times C$ descritos en la relación

$$S = \left\{ (b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1 \right\}$$

Solución En este caso

$$S = \left\{ \left(1, \frac{3}{2} \right), \left(3, \frac{5}{2} \right) \right\}$$

y entonces

$$\text{im}(S) = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \right\}$$

Lema 1. Si R es una relación binaria, entonces $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ es una relación binaria

Demostración. Dado $(a, b) \in R$, tenemos que (b, a) es un par ordenado. Así $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ es un conjunto de pares ordenados, por lo que $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ es una relación binaria \square

Definición 4. La relación inversa R^{-1} de una relación R , es una relación definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$ descritos en la relación

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

Solución En este caso

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

y entonces

$$R^{-1} = \{(1, -1), (1, 1)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$B = \{1, 3\} \quad C = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right\}$$

Hallar los elementos de $B \times C$ descritos en la relación

$$S = \left\{ (b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1 \right\}$$

Solución En este caso

$$S = \left\{ \left(1, \frac{3}{2} \right), \left(3, \frac{5}{2} \right) \right\}$$

y entonces

$$S^{-1} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, 1 \right), \left(\frac{5}{2}, 3 \right) \right\}$$

Existe una manera de combinar dos relaciones para formar una nueva relación, según la siguiente definición

Definición 5. Sean R y S relaciones binarias. La relación composición de R con S , denotada $S \circ R$, es el conjunto

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad C = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$, $B \times C$ descritos en la relaciones R , S y $S \circ R$

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

$$S = \left\{(b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1\right\}$$

Solución En este caso

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

$$S = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

Ahora bien se tiene que

$$S \circ R = \left\{\left(-1, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}\right)\right\}$$

Proposición 1. Si R y S son relaciones binarias, entonces

$$S \circ R \subseteq \text{dom}(R) \times \text{im}(S)$$

Demostración. Sea $(a, c) \in S \circ R$, entonces existe $b \in \text{im}(R)$ de forma que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$. De aquí que $a \in \text{dom}(R)$ y $c \in \text{im}(S)$. Por lo tanto, $(a, c) \in \text{dom}(R) \times \text{im}(S)$ y $S \circ R \subseteq \text{dom}(R) \times \text{im}(S)$ \square

Teorema 1. Sean R , S relaciones binarias. Entonces se tiene

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} (a, c) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (c, a) \in (S \circ R) \\ &\Leftrightarrow \exists b ((c, b) \in R \wedge (b, a) \in S) \\ &\Leftrightarrow \exists b ((b, c) \in R^{-1} \wedge (a, b) \in S^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \exists b ((a, b) \in S^{-1} \wedge (b, c) \in R^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (a, c) \in R^{-1} \circ S^{-1} \end{aligned}$$

\square