Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales

Considérese rl sistema homogéneo

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

Obsérvese que este sistema siempre será consistente, pues al menos posee la solución trivial

$$x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$$

Ejemplo Considere el sistema homogéneo de 4 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{gathered} 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{gathered}$$

Este sistema tiene la matriz asociada

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Al llevarla a su forma escalonada reducida se obtiene

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De modo que el sistema es equivalente a

$$\begin{gathered} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{gathered}$$

Y el conjunto de soluciones será

$$\{x_i = t, x_2 = 2t, x_3 = t, t \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo Consideremos ahora el sistema

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{gathered}$$

Con la matriz del sistema la llevamos a una forma escalonada reducida y obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

De modo que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{7}{8}x_4 &= 0 \\ x_2 + \tfrac{3}{2}x_4 &= 0 \\ x_3 + \tfrac{3}{8}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

es equivalente al original y entonces el conjunto solución es:

$$\left\{ x_1 = \frac{7}{8}t, x_2 = -\frac{3}{2}t, x_3 = -\frac{3}{8}t, x_4 = t,\ \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Teorema 1. *Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones tendrá siempre una infinidad de soluciones*

Demostración. Supóngase que el sistema tiene m ecuaciones y n incognitas. La hipótesis del teorema es que $m < n$. La mteriz del sistema es una matriz rectangular horizontal. Supóngase que, después de llevar esta matriz a su forma escalonada reducida se obtuvieron r líneas no nulas. Es claro que $r \leq m$, y por lo tanto $r < n$. Entonces, existen $k = n - r$ variables que quedan libres en el sistema, esto es, que éste posee una infinidad de soluciones □

La solución de un sistemas no homogéneo de ecuaciones lineales

Considérese el sistem de m ecuaciones con n incognitas $AX = B$ (A es una matriz $m \times n$) y se asociará a éste el sistema homogéneo $AX = 0$ (aquí, 0 denota la matriz cero $m \times 1$) y se dirá que este sistema es el sistema homogéneo asociado a $AX = B$. Se dirá que

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{bmatrix}$$

es una solución de $AX = B$ si la matriz $A\widetilde{X}$ es idéntica a la matriz B (se trata del mismo concepto de solución de ecuaciones lineales, escrito con matrices) lo cual se escribirá simplemente como: si $\widetilde{X}$ es solución de $AX = B$ entonces $A\widetilde{X} = B$.

Teorema 2. *Si el sistema $AX = B$ es consistente, entonces la solución general del sistema puede escribirse como la suma de una solución particular del mismo más la solución general del sistema homogéneo asociado $AX = 0$*

Demostración. Supóngase que el sistema $AX = B$ es consistente (su conjunto solución no es vacio). Sea $\widetilde{X_p}$ una solución particular del sistema, y sea $\widetilde{X}$ cualquier otra solución del mismo.
Tenemos entonces

$$A(\widetilde{X} - \widetilde{X_p}) = A\widetilde{X} - A\widetilde{X_p} = B - B = 0$$

entonces $\widetilde{X_h} = \widetilde{X} - \widetilde{X_p}$ es alguna solución del sistema homogéneo asociado $AX = 0$.
Es decir, como $\widetilde{X} = \widetilde{X_p} + \widetilde{X_h}$ cualquier solución del sistema $AX = B$ se escribe como la suma de una solución particular $\widetilde{X_p}$ del mismo, más alguna solución del sistema homogéneo asociado.
Sea ahora $\widetilde{X_h}$ cualquier solución de $AX = 0$. Al escribir $\widetilde{X} = \widetilde{X_p} + \widetilde{X_h}$ se ve que $A\widetilde{X} = B$, esto es, es solución de $AX = B$ $\square$

Ejemplo Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 19 \end{aligned}$$

Al usar eliminación Gaussiana, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 - t \\ x_2 &= -1 + t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
Usando notación matricial

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - t \\ -1 + t \\ t \end{bmatrix}$$

Obsérvese que

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

en donde $x_1 = 7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ es una solución particular del sistema y $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$) es la solución general del sistema homogéneo asociado.