El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales

Teorema 1. *Sea $AX = 0$ un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si $m < n$, entonces el sistema $AX = 0$ tiene una solución no trivial.*

Demostración. Supóngase que $m < n$ entonces

$$rango\ (A) \leq m < n$$

de manera que si hacemos $K = n - rango\ (A)$ se tiene que existen K incognitas libres, que al ser libres deben existir valores $\neq 0$ tal que $AX = 0$ tiene una solución no trivial. □

Ejemplo Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Al usar eliminación Gaussiana, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2+R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{(-\frac{1}{3})R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \overset{R_1+2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Esto nos da el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{x_3}{3} \\ x_2 &= -\tfrac{2}{3}x_3 \end{aligned}$$

Si tomamos $x_3 = 3$ una solución es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Y un conjunto de soluciones se tiene

$$\{(t, -2t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
Usando notación matricial

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ 3t \end{bmatrix}$$

Ahora bien si consideramos el sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

y procediendo en forma análoga se tiene una solución

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Obsérvese que $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$ es una solución particular del sistema y $x_1 = -t$, $x_2 = -2t$, $x_3 = 3t$ ($t \in \mathbb{R}$) es la solución general del sistema homogéneo asociado.
Por lo tanto una solución general del sistema es

$$\{(1, 1, 4) + t(1, -2, 3), \quad t \in \mathbb{R}\}$$