Bases y Dimensión

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial. Se dice que el subconjunto S de V es una base de V si*
(a) S genera a V
(b) S es linealmente independiente

Ejemplo Los vectores $v_1 = (3, 1, -1)$, $v_2 = (4, 1, 1)$ y $v_3 = (1, 2, 3)$ constituyen una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.
En efecto pues si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$, es decir existen escalares $c_1,\ c_2,\ c_3$ tales que

$$(x, y, z) = c_1(3, 1, -1) + c_2(4, 1, 1) + c_3(1, 2, 3)$$

Al realizar las operaciones indicadas e igualando las correspondientes coordenadas de los vectores involucrados se obtiene

$$\begin{gathered} 3c_1 + 4c_2 + c_3 = x \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = y \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 = z \end{gathered}$$

éste es un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas cuyo determinante es

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

por lo que el sistema tiene una única solución, por lo que los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$ generan $\mathbb{R}^3$

Teorema 1. *El subconjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ del espacio vectorial V es una base de V si, y solo si cada vector $v \in V$ es expresado de manera única como una combinación lineal de los vectores de β*

Demostración. Supóngase que $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V. Sea $v \in V$ arbitrario de V. Existe entonces escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ tales que

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 +, ..., +c_nv_n$$

Supóngase ahora que v también tiene la representación

$$v = d_1v_1 + d_2v_2 +, ..., +d_nv_n$$

entonces

$$c_1v_1 + c_2v_2 +, ..., +c_nv_n = d_1v_1 + d_2v_2 +, ..., +d_nv_n$$

o sea

$$(c_1 - d_1)v_1 + (c_2 - d_2)v_2 +, ..., +(c_n - d_n)v_n = 0$$

como los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente independientes entonces $c_i - d_i = 0, \quad \forall\ i = 1, ..., n$
por lo tanto la representación de $v \in V$ como combinación lineal de los vectores de la base β es única.
Reciprocamente, supóngase que cada $v \in V$ es representado de manera única como combinación lineal de los elementos de β. En tal caso se tiene que

$$L(v_1, v_2, ..., v_n) = V$$

Ahora para ver que son linealmente independientes, consideramos la combinación lineal

$$c_1v_1 + c_2v_2+, ..., +c_nv_n = 0$$

esta expresión se puede ver como la representación del vector $= \in V$, pero también se tiene la representación

$$0v_1 + 0v_2+, ..., +0v_n = 0$$

en vista de la unicidad de la representación supuesta en la hipótesis, se concluye que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, es decir los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base de V. $\square$

Teorema 2. *Suponga que en el espacio vectorial V existen n vectores $v_1, ..., v_n$ que lo generan. Entonces cualquier conjunto linealmente indepenciente en V es finito y no contiene más de de n vectores*

Demostración. Considérese el conjunto de m vectores en V, $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, en donde $m > v$. Como $L(v_1, ..., v_n) = V$, para cada u_i existe $a_{ij},\ i = 1, ..., n$ escalares tales que

$$u_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i, \quad j = 1, ..., m$$

formamos la combinación lineal

$$c_1u_1 + c_2u_u + \cdots + c_mu_m$$

sustituimos los valores

$$c_1u_1 + c_2u_u + \cdots + c_mu_m = \sum_{j=1}^{m} c_ju_j = \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j \right) v_i$$

Sea A la matriz de orden $n \times m$ de coeficientes a_{ij}.
Considérese el sistema homogeneo de n ecuaciones con m incognitas $AX = 0$. Como estamos suponiendo que $m > n$, existen entonces $c_1, ..., c_m$ no todos cero tales que $A\tilde{X} = 0$, donde $\tilde{X}$ es la matrix de orden $m \times 1$ de elementos $c_1, ..., c_m$. Entonces se satisfacen las relaciones

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = 0, \quad i = 1, ..., n$$

sustituimos en

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{n} (0)\, v_i = 0$$

obtenemos que

$$c_1u_1 + c_2u_u + \cdots + c_mu_m = 0$$

en donde no todos los escalares $c_1, ..., c_m$ son iguales a cero. Es decir, el conjunto S es linealmente dependiente. $\square$