Dependencia e Independencia Lineal

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, ..., v_n$ n vectores de V. Se dice que éstos valores son linealmente independientes si se cumple*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0, \qquad c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

caso contrario, se dira que tales valores son linealmente dependientes, es decir si existen escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ con al menos uno de ellos diferente de cero tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

Ejemplo Sean los vectores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 2, 5)$ y $v_3 = (0, 1, 4)$ en $\mathbb{R}^3$, para verificar que son linealmente independientes, debe ocurrir

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-1, 2, 5) + c_3(0, 1, 4) = 0$$

es decir

$$\begin{gathered} c_1 - c_2 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 5c_2 + 4c_3 \end{gathered}$$

que es un sistema 3×3 cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

donde $\det A = 13 \neq 0$. Por lo tanto el sistema tiene solución $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Teorema 1. *Los n vectores $v_1, ..., v_n$ del espacio vectorial V son linealmente dependientes si, y solo si al menos uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los $n - 1$ vectores resultantes.*

Demostración. Si los vectores son linealmente independientes entonces existe $c_i \neq 0$ tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

$$\Rightarrow \; c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = -c_iv_i$$
$$\Rightarrow \; -\frac{c_1}{c_i}v_1 - \frac{c_2}{c_i}v_2 + ... \frac{-c_n}{c_i}v_n = v_i$$

por lo que v_i es una combinación lineal de los restantes
Reciprocamente, supóngase que al menos uno de los n vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ puede escribirse como combinación lineal de los $n - 1$ vectores restantes.
Supóngase que v_1 es tal que

$$v_1 = d_2v_2 + \cdots + d_nv_n$$

que se puede escribir

$$v_1 - d_2v_2 - \cdots - d_nv_n = 0$$

tomando $c_1 = 1 \neq 0$ y $c_i = -d_i$ con $i = 2, 3, ..., n$, o se que los vectores $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes □

Ejemplo Sea V un espacio vectorial y sean $S_1, \ S_2 \ \subset \ V$ tal que S_1 es linealmente dependiente entonces S_2 es linealmente dependiente.

Demostración. Si S_1 es linealmente dependiente entonces se tienen un número finito de vectores $v_1, ..., v_n$ en S_1 y por tanto en S_2 tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

con al menos un $c_i \neq 0$ y como tal combinación pertenece a S_2 entonces S_2 es linealmente dependiente □

Ejemplo Sea V un espacio vectorial y y sean $S_1 \subset S_2 \ \subset \ V$. Si S_2 es linealmente independiente entonces S_1 también lo es.

Demostración. Suponga que S_1 es linealmente dependiente, entonces existe $c_i \neq 0$ tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

con $c_i \neq 0$ pero cada $v_i \in S_2$ por lo que existiría en S_2 una combinación lineal no trivial, lo cual es absurdo, por lo tanto S_1 es linealmente independiente □

Teorema 2. *Sea $v_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$ con $j = 1, ..., n$ n vectores en $\mathbb{R}^n$. Considérese la matriz A de orden N, $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, ..., n$ entonces los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente independientes si y solo si* $\det A = 0$

Demostración. Si $\det A = 0$ entonces considérese el sistema de ecuaciones $AX = 0$. Este sistema tiene soluciones no triviales. Es decir existe

$$X_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

tal que $AX_0 = 0$ y no todos los escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ son iguales a cero. Al escribir explicitamente la espresión $AX_0 = 0$ se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0 \qquad j = 1, ..., n$$

lo cual equivale a

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

como no todos los escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ son cero, esto significa que los vectores $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes

Supóngase que los vectores $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes por lo que algunos de los vectores se puede escribir como una combinación lineal de los otros. Supóngase sin perdida de generalidad

$$v_1 = d_2v_2 + \cdots + d_nv_n$$

para ciertos escales $d_2, ..., d_n$ en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tomando en cuenta que $v_1 - d_2 v_2 - \cdots - d_n v_n = 0$ hacemos las operaciones con las columnas siguientes, sustituimos la primera columna por ella misma menos d_j veces la j-ésima columna y obtenemos

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} - d_2 a_{12} - \cdots - d_n a_{1n} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} - d_2 a_{22} - \cdots - d_n a_{2n} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} - d_2 a_{2n} - \cdots - d_n a_{nn} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces $\det A = \det A' = 0$ □

Ejemplo Dado el conjunto $v_1 = e^x$, $v_2 = \operatorname{sen}(x)$, $v_3 = \cos(x)$ pertenecientes al espacio vectorial de las funciones continuas, pruebe que son linealmente independientes

Demostración. Al formar la combinación lineal

$$c_1 e^x + c_2 \operatorname{sen}(x) + c_3 \cos(x)$$

si es cero para cualquier valor de x ponemos $x = 0,\ x = \pi,\ x = \dfrac{\pi}{2}$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\pi} - c_3 = 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $-1 - e^{\pi} \neq 0$ por lo tanto el sistema tiene solo la solución trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ y entonces se concluye que los vectores son linealmente independientes □