

Ejemplos de Espacios Vectoriales

Ejemplo \mathbb{R}^n

El conjunto de vectores en este espacio es el conjunto de n-adas ordenadas de números reales x_1, x_2, \dots, x_n , es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

Al vector $((x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se le denotará simplemente como x . Es decir se escribirá $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. A los números $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se les llama coordenadas del vector x . Similarmente se escribirá $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ etc., para denotar a los vectores en este espacio.

En \mathbb{R}^n se define la suma de los vectores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ coordenada a coordenada, es decir $x + y$ es el vector en \mathbb{R}^n cuyas coordenadas son las correspondientes sumas de coordenadas de x y y . O sea

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Similarmente el producto del vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se define coordenada a coordenada, o sea,

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Vamos a verificar que dicho conjunto satisface las propiedades de espacio vectorial.

1. La suma es conmutativa

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= y + x \end{aligned}$$

2. La suma es asociativa

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + [(y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)] \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + [y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n] \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

3. Existe el cero en \mathbb{R}^n . Escribase $0 \in \mathbb{R}^n$ como $0 = (0, \dots, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} x + 0 &= (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) \\ &= (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= x \end{aligned}$$

4. Para $x \in \mathbb{R}^n$, existe $(-x) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + (-x) = 0$. Escribáse $-x = (-x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$
Por lo tanto

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, \dots, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. Se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + ((\lambda y_1, \dots, \lambda y_n)) \\ &= \lambda x + \lambda y \end{aligned}$$

6. Se tiene propiedad distributiva

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)x &= ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, \dots, (\lambda + \mu)x_n) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \mu x_2, \dots, \mu x_n) \\ &= \lambda x + \mu x \end{aligned}$$

7. se tiene que

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)x &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, \dots, (\lambda\mu)x_n) \\ &= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \dots, \lambda(\mu x_n)) \\ &= \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \dots, \mu x_n) \\ &= \lambda(\mu x) \end{aligned}$$

8. se tiene

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \dots, 1 \cdot x_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= x \end{aligned}$$

Esto demuestra entonces que \mathbb{R}^n es un espacio vectorial.

Subespacios Vectoriales

Sea V un espacio vectorial y considérese un subconjunto W de V (es decir, el conjunto W es tal que todo elemento de W es elemento de V). W hereda de manera natural, las operaciones de espacio vectorial que estaban definidas en V . Se tiene así, un conjunto W en donde existen operaciones de suma y producto por escalares, ¿Es W un espacio vectorial?

Ejemplo Sea V el espacio vectorial \mathbb{R}^2 formado por aquellos vectores (x, y) que tiene su segunda coordenada positiva (geométricamente W corresponde al semiplano superior del plano XY). Es decir,

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

En este caso las operaciones definidas en W son las que están definidas en \mathbb{R}^2 , es decir

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si consideramos el escalar $\lambda < 0$ el vector $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ no pertenece a W , pues siendo $y > 0$, se tendría $\lambda y < 0$. En consecuencia el subconjunto W de V no es un espacio vectorial.

Ejemplo Consideremos el subconjunto W de \mathbb{R}^2 dado por

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}, y = 2x\}$$

En este caso se puede comprobar que W si es un espacio vectorial con las operaciones usuales de \mathbb{R}^2

Teorema 1. Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto de V . Entonces, W es un subespacio de V si y solo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- (a) $0 \in W$
- (b) $x + y \in W$ siempre que $x \in W$ y $y \in W$
- (c) $ax \in W$ siempre que $a \in F$ y $x \in W$.

Demostración. Si W es un subespacio de V , entonces W es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en V . Se cumplen entonces (b) y (c), y existe $0' \in W$ tal que $x + 0' = x \forall x \in W$. Pero también $x + 0 = x$ y por tanto $0' = 0$ en consecuencia se satisface (a).

Recíprocamente si se satisfacen las condiciones (a), (b) y (c), y por ser subconjunto de V se satisfacen las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva tanto para la suma como para el producto por escalar, falta ver la propiedad del inverso aditivo.

Si $x \in W$, entonces $(-1)x \in W$ por (c), y $-x = (-1)x$. De aquí que W sea subespacio de V □

Ejemplo Considérese el conjunto L de \mathbb{R}^2 dado por

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$$

en donde a y b son dos números reales fijos no ambos cero.

Afirmamos que L es un subespacio de \mathbb{R}^2

Demostración. En efecto, sean $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ dos vectores de L . Se tiene entonces

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in L$$

pues

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 = 0$$

por lo tanto $u + v \in L$

Ahora bien

$$\lambda u = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

de donde

$$a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1) = \lambda(ax_1 + by_1) = 0$$

por lo tanto $\lambda u \in L$.

□