Matriz asociada a una transformación lineal.

Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita, digamos que $\dim V = n$ y $\dim U = m$.

Sean β_1 y β_2 bases de V y U, respectivamente.

Sea $T: V \to U$ una transformación lineal entre estos espacios.

Para el vector $v \in V$ existen escalares $x_1, x_2, \dots, x_n$ t.q.

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

es decir

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

pregunta si es lo mismo decir que depende de la Base

La imagen de v bajo T es el vector

$$T(v) = T(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + \dots + x_n T(v_n)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j). \qquad \text{I}$$

Cada vector $T(v_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ se encuentra en U (más concretamente, en $\operatorname{Im}(T)$), de modo que existen escalares $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ tales que

$$T(v_j) = a_{1j} u_1 + a_{2j} u_2 + \dots + a_{mj} u_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i, \quad j = 1, 2, \dots, n \qquad \text{II}$$

Es decir,

$$[T(v_j)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Al sustituir las n expresiones de II en I tenemos que

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) u_i \qquad \text{III}$$

Por la unicidad de la expresión del vector $T(v) \in U$ como combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de la base β_2 de U se concluye que

$$[T(v)]_{\beta_2} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j , \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j , \ldots , \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \right)$$

esta es la más correcta

o bien,

$$[T(v)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

Considérese la matriz $A = (a_{ij})_{i=1 \ldots m,\ j=1 \ldots n}$

Obsérvese que

$$A[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

$$= [T(v)]_{\beta_2}$$

Es decir, $[T(v)]_{\beta_2} = A[v]_{\beta_1}$ (IV)

O sea, La matriz A es t.q. su j-ésima columna se encuentran los elementos de la matriz de coordenadas del vector $T(v_j)$ con respecto a la base β_2 de U.

Esquemáticamente

$$A = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_{\beta_2} & [T(v_2)]_{\beta_2} & \cdots & [T(v_n)]_{\beta_2} \end{bmatrix}$$

Def.

A la matriz A se le llama <u>matriz de la transformación T con respecto a las bases β_1 y β_2</u> (A es la <u>matriz asociada a T</u>)

Nota: Cuando T sea un operador lineal, es decir, $T: V \to V$, la base del codominio y dominio es la misma, ~~esto~~ en este caso escribiremos a A como $[T]_\beta$

Obsérvese que todos los elementos de la matriz asociada a la transf. T depende de las bases β_1 y β_2 elegidas para V y W resp.

Para remarcar esta dependencia, se escribirá:

$$A = [T]_{\beta_1 \beta_2}$$

El análisis anterior queda entonces resumido a la fórmula

$$[T(v)]_{\beta_1} = [T]_{\beta_2 \beta_1} [v]_{\beta_2}.$$

Ejemplo 1:

Sea T la transformación

$T: M_{2\times 2} \to M_{3\times 1}$

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3b-c \\ a+2b+c+2d \\ a+b-3c-4d \end{bmatrix}$$

Primero se verifica que T es una transf lineal (se deja al lector XD)

Tomamos una base β_1 para $M_{2\times 2}$ y β_2 para $M_{3\times 1}$

$$\beta_1 = \left\{ \overset{u_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \overset{u_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \overset{u_3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}, \overset{u_4}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \right\}$$

$$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Obtener ~~$[T]_{\beta_1\beta_2}$~~ $[T]_{\beta_1 \beta_2}$

Primero veamos cuáles son las imágenes $T(u_j)$, $j=1,2,3,4$ de los vectores de la base $\beta_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $M_{2\times 2}$.

$$T(u_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(u_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(u_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad T(u_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos que encontrar la representación de $T(v_j)$ como combinación de los vectores de β_2 para $j=1,2,3,4$

$$T(v_1)=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

pero en este caso como β_2 es la base canónica $M_{3\times 1}$ tenemos que $a=2$, $b=1$ y $c=1$, así para todos los j's ent

$$[T(v_1)]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\quad [T(v_2)]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$[T(v_3)]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}\quad [T(v_4)]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}0\\2\\-4\end{bmatrix}$$

así tenemos que

$$[T]_{\beta_1\beta_2}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\1 & 2 & 1 & 2\\1 & 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

- Con esta matriz, se puede obtener la imagen de cualquier vector $v\in M_{2\times 2}$.

Basta escribir la matriz de coordenadas $[v]_{\beta_1}$ y hacer el producto $[T]_{\beta_1\beta_2}[v]_{\beta_1}$. El resultado será la matriz de coordenadas del vector $T(v)$ respecto de la base β_2.

Por ejemplo:

Sea $v=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & -8\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ ent

$$[v]_{\beta_1}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\-8\end{bmatrix}$$ pues β_1 es la canónica

así tenemos que

$$[T(v)]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\1 & 2 & 1 & 2\\1 & 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\\-8\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}9\\-2\\25\end{bmatrix}\quad \therefore\ [T(v)]_{\beta_2}=\begin{bmatrix}9\\-2\\25\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

Sea $T: P_4 \to P_4$ una transformación dada por $T(p) = p'$.

(1) Probar que T es lineal (ejercicio)

(2) Tomemos $\beta = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ una base de P_4. (base canónica)

obtengamos $[T]_\beta$

Entonces:

$T(1) = (1)' = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4$

$T(x) = (x')' = 1 = 1\cdot 1 + 0x^2 \cdots$

$T(x^2) = (x^2)' = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0 \cdots$

$T(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3x^2 + 0\cdot x^4$

$T(x^4) = 4x^3 = 0\cdot 1 + 0\, x + 0\cdot x^2 + 4\cdot x^3 + 0\cdot x^4$

entonces

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcular $[T(p)]_\beta$ para

$p = 5 + 8x - 10x^2 + 6x^3 - 7x^4$

como ya tenemos $[T]_\beta$, nos falta encontrar $[p]_\beta$ para usar (V)

$$[p]_\beta = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -10 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$ pues β es la base canónica de P_4

así tenemos que

$$\underbrace{[T(p)]_\beta}_{[p']_\beta} = [T]_\beta \, [p]_\beta =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -10 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -20 \\ 18 \\ -28 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación dada por

$$T(x,y,z) = (x+3y-z,\ 2x+y+3z,\ -3x-14y+8z,\ 3x+4y+2z)$$

(+) Encontrar $[T]_{\beta_1,\beta_2}$ donde β_1 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y β_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Calcular $[T]_{\beta_1\beta_2}$

$\beta_1 = (\overset{u_1}{(1,0,0)}, \overset{u_2}{(0,1,0)}, \overset{u_3}{(0,0,1)})$

$\beta_2 = (\underset{u_1}{(1,0,0,0)}, \underset{u_2}{(0,1,0,0)}, \underset{u_3}{(0,0,1,0)}, \underset{u_4}{(0,0,0,1)})$

① Primero calcular $T(u_i)$ $u_i \in \beta_1$ $i=1,2,3$

$T(u_1) = T(1,0,0) = (1,2,-3,3)$

$T(u_2) = T(0,1,0) = (3,1,-14,4)$

$T(u_3) = T(0,0,1) = (-1,3,8,2)$

② Encontrar $[T(u_i)]_{\beta_2}$

Como β_2 es canónica tenemos que

$T(u_1) = 1u_1 + 2u_2 + (-3)u_3 + 3u_4$

$\Rightarrow [T(u_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Análogamente

$[T(u_2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -14 \\ 4 \end{bmatrix}$ $[T(u_3)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

Por lo tanto $[T]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -14 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

¿Y si cambiamos las bases?

Ahora consideremos

$\gamma_1 = \{\overset{v_1}{(1,0,0)}, \overset{v_2}{(1,1,0)}, \overset{v_3}{(1,1,1)}\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$\gamma_2 = \{\underset{u_1}{(0,0,1,1)}, \underset{u_2}{(0,1,0,1)}, \underset{u_3}{(1,1,0,1)}, \underset{u_4}{(1,1,1,1)}\}$ base de $\mathbb{R}^4$

① Primero calculemos $T(v_i)$ $i=1,2,3$

$T(v_1) = (1,2,-3,3)$

$T(v_2) = (1+3,\ 2+1,\ -3-14,\ 3+4) = (4,3,-17,7)$

$T(v_3) = (1-3-1,\ 2+1+3,\ -3-14+8,\ 3+$

$= (-3,6,-9,9)$

② Calculemos $[T(u_i)]_{\beta_2}$ $i=1,2,3$

Entonces primero encontremos los escalares t.q. $T(u_i) = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4$

Para ahorrarnos pasos, primero hagámoslo en general.

Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ encontrar c_1, c_2, c_3, c_4 t.q. $v = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1(0,0,1,1) + c_2(0,1,0,1) + c_3(1,1,0,1) + c_4(1,1,1,1) = (c_3 + c_4,\ c_2 + c_3 + c_4,\ c_1 + c_4,\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$

$\Rightarrow$

$x_1 = c_3 + c_4$

$x_2 = c_2 + c_3 + c_4$

$x_3 = c_1 + c_4$

$x_4 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Resolvamos por eliminación Gaussiana

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \underset{R_3 \leftrightarrow R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_1 \end{array}\right) \underset{-R_2 + R_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_1 \end{array}\right) \underset{-R_4 + R_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_1 \end{array}\right) \underset{-R_1 + R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x_4 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \underset{-R_3 + R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x_4 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 - x_2 - x_3 + x_1 \end{array}\right) \underset{R_3 \leftrightarrow R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 + x_3 - x_4 \end{array}\right)$$

$\therefore$

$$c_1 = x_4 - x_2$$
$$c_2 = x_2 - x_1$$
$$c_3 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4$$
$$c_4 = x_2 + x_3 - x_4$$

$$\Rightarrow [T(u_i)]_{\gamma_2} = \begin{bmatrix} x_4 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2, 3$

Así tenemos que

$T(u_1) = T(1,0,0,1) = (1,2,-3,3) =$

$(3-2)(0,0,1,1) + (2-1)(0,1,0,1) +$

$(1-2+3+3)(1,1,0,1) +$

$(2-3-3)(1,1,1,1) =$

$(\underline{1})(0,0,1,1) + (\underline{1})(0,1,0,1) +$

$(\underline{5})(1,1,0,1) + (\underline{-4})(1,1,1,1)$

Ent $[T(u_1)]_{\gamma_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$[T(u_2)]_{\gamma_2} = [(4,3,-17,7)]_{\gamma_2} = \begin{bmatrix} 7-3 \\ 3-4 \\ 4-3+17+7 \\ 3-17-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 25 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$[T(u_3)]_{\gamma_2} = [(3,6,-9,9)]_{\gamma_2} = \begin{bmatrix} 9-6 \\ 6-3 \\ 3-6+9+9 \\ 6-9-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$[T]_{\gamma_1 \gamma_2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 25 & 15 \\ -4 & -21 & -12 \end{bmatrix}$$

Ej

Encuentre la matriz asociada a la sig transf. lineal T dada por

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$T(x,y,z) = (5x+2y-z, 3x+4y-2z)$

donde β_1 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y

β_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$\beta_1 = \{\overset{u_1}{(1,0,0)}, \overset{u_2}{(0,1,0)}, \overset{u_3}{(0,0,1)}\}$

$\beta_2 = \{(1,0),(0,1)\}$

(i) Encontrar la matriz asociada a T, i.e.,

$[T]_{\beta_1\beta_2}$

(i) $T(u_1) = (5,3)$

$T(u_2) = (2,4)$

$T(u_3) = (-1,-2)$

(ii) $[T(u_1)]_{\beta_2} = 5(1,0) + 3(0,1)$

$[T(u_2)]_{\beta_2} = 2(1,0) + 4(0,1)$

$[T(u_3)]_{\beta_2} = (-1)(1,0) + (-2)(0,1)$

(iii) $[T]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

(4) Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$T(a_1,a_2) = (3a_1 - a_2, 2a_1 + 4a_2, -a_1 + a_2)$

Sean $\beta_1 = \{(2,1),(-1,1)\}$

$\beta_2 = \{(1,-1,0),(0,2,0),(0,1,1)\}$

Calcular $[T]_{\beta_1\beta_2}$

$T(u_1) = T(2,1) = (3\cdot 2 - 1, 2\cdot 2 + 4, -2+1)$

$= (2, 8, -1)$

$T(u_2) = T(-1,1) = (-3-1, -2+4, 1+1)$

$= (-4, 2, 2)$

Queremos que

$T(u_i) = c_1(1,-1,0) + c_2(0,2,0) + c_3(0,1,1)$, $i=1,2$

En general

$(x,y,z) = (c_1, -c_1 + 2c_2 + c_3, c_3) \Rightarrow$

$x = c_1$

$y = -c_1 + 2c_2 + c_3 \Rightarrow$

$z = c_3$

$c_2 = \dfrac{y+x-z}{2}$

Entonces $[T(v_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{y+x-z}{2} \\ z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow [T(v_1)]_{\beta_2} = [(2,8,-1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{8+2+1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 \\ 11/2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$[T(v_2)]_{\beta_2} = [(-4,2,2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{2-4-2}{2} \\ 2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad [T]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 11/2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Composición de transformaciones lineales

Teorema. (Composición de transformaciones lineales es lineal)
Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el mismo campo F, y sean $T: V \to W$ y $U: W \to Z$ trans. lineales
~~Sea~~ Entonces $UT: V \to Z$ es lineal.

Dem. ~~P.D UT~~

Sean $x, y \in V$ y $a \in F$.
P.D. $UT(ax+y) = aUT(x) + UT(y)$
Ent.

$UT(ax+y) = U(T(ax+y)) \overset{T \text{ es lineal}}{=} U(T(ax)+T(y)) \overset{T \text{ es l}}{=}$

$U(aT(x)+T(y)) \overset{U \text{ lineal}}{=} \underset{\substack{T(x) \in W \\ U \text{ es lineal}}}{U(aT(x))} + U(T(y)) =$

$aU(T(x)) + U(T(y)) = a(UT)(x) + (UT)(y)$

$\therefore$ UT es lineal.

Teorema.
Sean U, V, W y R espacios vectoriales ~~[illegible]~~ Si

a) $T_1: V \to U$, $T_2: U \to W$ y $T_3: W \to R$

trans. l. lineales, entonces:

1. $T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$

2. Si $T: V \to U$ y $T_2, T_3 : U \to W$, ent
$(T_2 + T_3) \circ T_1 = T_2 \circ T_1 + T_3 \circ T_1$

3. Si $T_1 : U \to W$ y $T_2, T_3 : V \to U$, entonces
$T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3$

4. Si $c \in \mathbb{F}$ y $T_1 : V \to U$, $T_2 : U \to W$ ent
$c(T_2 \circ T_1) = (cT_2) \circ T_1 = T_2 \circ (cT_1)$

Dem.

1. P.D. $T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_3$

Sea $v \in V$, entonces

$(T_3 \circ (T_2 \circ T_1))(v) = T_3((T_2 \circ T_1)(v)) =$
$T_3(T_2(T_1(v))) = (T_3 \circ T_2)(T_1(v)) =$
$((T_3 \circ T_2) \circ T_1)(v)$

2. P.D. $(T_2 + T_3) \circ T_1 = T_2 \circ T_1 + T_3 \circ T_1$

Sea $v \in V$, ent

~~4. Si $c \in \mathbb{R}$ y $T_1 : V \to U$, $T_2 : U \to W$, entonces~~

~~$c(T_2 \circ T_1) = (cT_2) \circ T_1 = T_2 \circ (cT_1)$~~

$((T_2 + T_3) \circ T_1)(v) = (T_2 + T_3)(\underset{\in U}{T_1(v)}) =$
$T_2(T_1(v)) + T_3(T_1(v)) =$
$T_2 \circ T_1(v) + T_3 \circ T_1(v)$

3. Sea $v \in V$, ent. P.D. $(T_1 \circ (T_2 + T_3))(v) = T_1 \circ T_2(v) + T_1 \circ T_3(v)$

$(T_1 \circ (T_2 + T_3))(v) =$
$T_1((T_2 + T_3)(v)) = T_1(\underset{\in U}{T_2(v)} + \underset{\in U}{T_3(v)}) =$
$T_1(T_2(v)) + T_1(T_3(v)) = T_1 \circ T_2(v) + T_1 \circ T_3(v)$

4. Sea $v \in V$
P.D. $(c(T_2 \circ T_1))(v) = ((cT_2) \circ T_1)(v) =$
$(T_2 \circ (cT_1))(v)$

(·) $(c(T_2 \circ T_1))(v) = (c(T_2(T_1(v)))) =$
$cT_2(T_1(v)) = ((cT_2) \circ T_1)(v)$

(··) $(c(T_2 \circ T_1))(v) = (c(T_2(T_1(v)))) \overset{\text{como } T_2 \text{ es lineal}}{=}$
$cT_2(T_1(v)) \overset{\text{como } T_2 \text{ es lineal}}{=} T_2(cT_1(v)) = (T_2 \circ (cT_1))(v)$

Teorema.

Sean V, W y Z espacios vectoriales finitos, con bases α, β, γ resp.

Sea $T: V \to W$ y $U: W \to Z$ transformaciones lineales. Entonces

$$\left([U \circ T]^{\gamma}_{\alpha} = [U]^{\gamma}_{\beta}\, [T]^{\beta}_{\alpha}\right)$$

$$[U \circ T]_{\alpha\gamma} = [U]_{\beta\gamma}\, [T]_{\alpha\beta}$$

Corolario: Sea V un esp. vect. si $U, T: V \to V$ ent

$$[U \circ T]_{\beta} = [U]_{\beta}\, [T]_{\beta}$$

Inversa de una transformación lineal.

Definición:

Sean V y W espacios vectoriales, y $T: V \to W$ lineal. Una función ~~$W \to V$~~: $U: W \to V$ es <u>inversa</u> de T si $TU = I_W$ y $UT = I_V$. [donde I_W y I_V son los operadores identidad de W y V resp. i.e. $I_W(w) = w$]

Si T tiene una inversa se dice que T es <u>invertible</u> (invertible).

Observemos que en la ~~para~~ definición de invertibilidad se pide que exista U $\ni$ $TU = I_W$ y $UT = I_V$. Es decir, el hecho de que exista ~~un~~ $S: W \to V$ $\ni$ $S \circ T = I_V$ esto no garantiza que $T \circ S = I_W$. Pues sabemos que la composición de transf no conmuta.

Por ejemplo: sea $T: P \to P$ dado por
$T(p) = p'$ (derivada de los polinomios) y sea $S: P \to P$ el operador $S(a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k) =$
$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$.
Es fácil ver que S es lineal
Ahora observemos que:
$(T \circ S)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k) = T(S(p)) =$
$T\left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) =$
$a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$
$\therefore\ T \circ S = Id_P$

Ahora observemos que
$(S \circ T)(p) = S \circ (T(p)) = S(a_1 + 2a_2 x + \cdots + k a_k x^{k-1})$
$= a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_k x^k \neq$
$a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$
$\therefore\ S \circ T \neq Id_P$
$\therefore$ T no es invertible

Observación:
Si T es una transformación lineal invertible, la transformación lineal S es única.
Supongamos lo contrario, es decir, existen S_1 y S_2 que satisfacen las condiciones de la def. Entonces:
$S_1 = Id_V \circ S_1 = (S_2 \circ T) \circ S_1 = S_2 \circ (T \circ S_1) =$
$S_2 \circ Id_U = S_2$.
Así con esto denotaremos a S como T^{-1}

Teorema
1. Si la transformación lineal $T: V \to U$ es invertible, entonces $T^{-1}: U \to V$ también es invertible y $(T^{-1})^{-1} = T$.
2. Si $T_1: V \to U$ y $T_2: U \to W$ son transformaciones lineales invertibles, entonces $T_2 \circ T_1: V \to W$ también es invertible y $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$

$T: V \to U$

$T^{-1}: U \to V \quad , \quad (T^{-1})^{-1}: V \to U$

1. Sabemos que T^{-1} es única ent.

~~$T \circ T^{-1} = Id_U$ y $T^{-1} \circ T = Id_V$~~

$T^{-1} \circ (T^{-1})^{-1} = Id_V \Rightarrow$

$T \circ (T^{-1} \circ (T^{-1})^{-1}) = T \circ Id_V \Rightarrow$

$(T \circ T^{-1}) \circ (T^{-1})^{-1} = T \Rightarrow Id_U \circ (T^{-1})^{-1} = T$

$\Rightarrow (T^{-1})^{-1} = T \qquad T_1: V \to U \quad T_2: U \to W$

$\qquad T_1^{-1}: U \to V \quad T_2^{-1}: W \to U$

2. Primero se tiene que ver que

$T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ : W \to V$ es lineal ✓ $\qquad T_2 \circ T_1$

= Basta mostrar que $T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ es inversa de

$(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) \circ (T_2 \circ T_1) = T_1^{-1} \circ (\underbrace{T_2^{-1} \circ T_2}_{Id_U}) \circ T_1 =$

$T_1^{-1} \circ (Id_U) \circ T_1 = T_1^{-1} \circ T_1 = Id_V$

$(T_2 \circ T_1) \circ (T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) \overset{: W \to V}{=} $

$T_2 \circ (\underbrace{T_1 \circ T_1^{-1}}_{Id_U}) \circ T_2^{-1} = T_2 \circ Id_U \circ T_2^{-1} =$

$\underbrace{T_2 \circ T_2^{-1}}_{Id_W} = Id_W$

$\therefore (T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ //

Lema

Sea $T: V \to U$ una transformación lineal, entonces T es inyectiva si, y sólo sí, $Ker(T) = \{0\}$, i.e. $\dim(U) = rang(T)$

Dem.

$\Rightarrow$) T es inyectiva.

Sea $v \in Nuc(T)$, entonces

$T(v) = 0$, y por ser lineal sabemos que

$T(0) = 0$. $\Rightarrow v = 0$ (pues T es inyectiva)

$\therefore Nuc(T) = \{0\}$.

$\Leftarrow$) $Nuc(T) = \{0\}$

Sean $v, v_1 \in V$ tales que $T(v) = T(v_1)$

$\Rightarrow T(v) - T(v_1) = 0 \Rightarrow$ como T es lineal

$T(v - v_1) = 0$ como $Nuc(T) = \{0\} \Rightarrow$

$v - v_1 = 0 \Rightarrow v = v_1$

$\therefore T$ es inyectiva.

Teorema:

La transformación lineal $T: V \to U$ es inversible $\Leftrightarrow$ T es inyectiva y sobreyectiva.

Dem.

$\Rightarrow$) T es inversible.

Sea $v \in Nuc(T)$, entonces

$v = T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(0) = 0$ pues T^{-1} es lineal

Pero $T^{-1} \circ T = Id_V$, ~~$\Rightarrow$~~

$v = (T^{-1} \circ T)v = T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(0) = 0$

$\therefore$ $Ker(T) = \{0\}$ $\therefore$ T es inyectiva.

Sea $u \in U$. P.D. $\exists v \in V$ t.q. $T(v) = u$.

Como T^{-1} está definida en U, ~~tenemos~~ escribimos, $v = T^{-1}(u)$. $\Rightarrow$

$T(v) = T(T^{-1}(u)) = (T \circ T^{-1})(u) = Id_U(u)$

$= u$.

$\therefore$ T es sobreyectiva.

$\Leftarrow$) Supongamos que T es inyectiva y sobreyectiva.

P.D. que existe una transformación lineal $T^{-1}: U \to V$ t.q. $T^{-1} \circ T = Id_V$ y $T \circ T^{-1} = Id_U$ y que T^{-1} es lineal

Sabemos que para cada $u \in U$ existe un $v \in V$ t.q. $T(v) = u$ (pues T es sobreyectiva).

Además v es único, pues T es inyectiva.

Definamos $T^{-1}: U \to V$ como $T^{-1}(u) = v$.

Sea $v \in V$ ent

$(T^{-1} \circ T)(v) = T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(u) = v$

$\Rightarrow$ $(T^{-1} \circ T) = Id_V$

Sea $u \in U$ ent

$(T \circ T^{-1})(u) = T(T^{-1}(u)) = T(v) = u$

$\therefore$ $T \circ T^{-1} = Id_U$

~~Falta probar que T^{-1} es lineal~~

~~Sean $u_1, u_2 \in U$ y $c \in F$ ent tales a~~

~~$T^{-1}(cu_1+u_2) =$~~

Falta probar que T^{-1} es lineal.
Sean u y u' en U y consideremos los correspondientes v y v' tales que en V

$T(v) = u$, $T(v') = u'$, entonces

$u + u' = T(v) + T(v') = T(v + v')$ pues T es lineal $\Rightarrow$

$T^{-1}(u+u') = T^{-1}(T(v+v')) = v + v' =$
$T^{-1}(u) + T^{-1}(u')$

Sea $c \in F$ $\Rightarrow$

$T(cv) = cT(v) = cu$ $\Rightarrow$

$\cancel{T^{-1}(T(cv)) = T^{-1}(cu)}$

$T^{-1}(cu) = cv = cT^{-1}(u)$

$\therefore$ T^{-1} es lineal

$\therefore$ T es invertible

Espacios Isomorfos

Definición:

Sean U y V dos espacios vectoriales. Se dice que la función $f: V \to U$ es un isomorfismo de V a U si f es biyectiva y además cumple con las dos condiciones siguientes:

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V$
2) $f(cv) = cf(v)$ $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$.

Teorema:

Sea $f: V \to U$ un isomorfismo del espacio vectorial V al espacio vectorial U.

Entonces:

a) $f^{-1}: U \to V$ es un isomorfismo de U a V

b) si $g: U \to W$ es un isomorfismo de U a W, la composición $g \circ f: V \to W$ también es un isomorfismo, de V a W.

Demo

a) Como $f: V \to U$ es una función biyectiva $\Rightarrow$ $f^{-1}: U \to V$ también es una función biyectiva. Entonces

Falta mostrar que f^{-1} cumplen las condiciones 1 y 2 de la definición

P.D. f^{-1} es isomorfismo

1. Sean $u_1, u_2 \in U$ y $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = u_1$ y $f(v_2) = u_2$ entonces $f^{-1}(u_1) = v_1$ y $f^{-1}(u_2) = v_2$

Como f es isomorfismo, sabemos que

$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = u_1 + u_2 \Rightarrow$

~~$f(v_1+v_2) = u_1+u_2$~~

$f^{-1}(u_1 + u_2) = \cancel{f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2)} =$

$f^{-1}(f(v_1+v_2)) = v_1 + v_2 =$

$f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2)$ ✓

Sean $c \in \mathbb{R}$ y $u \in U$ y $v \in V$ t.q. $f(v) = u \Rightarrow f^{-1}(u) = v$

Como f es isomorfismo sabemos que

$f(cv) = c f(v) \Rightarrow f^{-1}(f(cv)) = f^{-1}(c f(v))$

$\Rightarrow cv = f^{-1}(cu)$

$\quad \| $

$\quad c f^{-1}(u)$

$\therefore f^{-1}(cu) = c f^{-1}(u)$ ✓

$\therefore f^{-1}: U \to V$ es isomorfismo

b) P.D. $g \circ f: V \to W$ es isomorfismo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & U \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Como f y g son biyectivas, sabemos que $g \circ f$ también es biyectiva.

Así falta mostrar que $g \circ f$ cumplen las condiciones 1 y 2 de la definición

1. Sean $v_1, v_2 \in V$, entonces

$(g \circ f)(v_1 + v_2) = g(f(v_1+v_2)) =$

~~$g(f(v_1)) + g(f(v_2))$~~ $= g(f(v_1) + f(v_2))$

$= g(f(v_1)) + g(f(v_2)) = g\circ f(v_1) + g \circ f(v_2)$ ✓

2. Sea $c \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ ent.

$g\circ f(cv) = g(f(cv)) = g(c f(v)) = c(g(f(v))) =$
$c(g \circ f)(v)$ ✓

$\therefore$ $g \circ f$ es isomorfismo.

Considérese a la familia de todos los espacios vectoriales. Establézcase en esta familia la siguiente relación:

$V \sim U$ $\Leftrightarrow$ existe un isomorfismo $f: V \to U$

Teorema:

La relación $V \sim U$ es una relación de equivalencia.

Dem.

1. La relación $\sim$ es reflexiva, i.e. $V \sim V$ $\forall$ espacio vectorial V.

~~Si $V \sim V$ $\Leftrightarrow$ $f: V \to V$ donde f=Id donde Id(v)=v $\forall v \in V$ es un isomorfismo~~

Esto es claro pues la función identidad $Id: V \to V$, $Id(v)=v$ $\forall v \in V$ es un isomorfismo de V a V.

Al último

Def.

Se dice que los espacios vectoriales U y V son isomorfos, lo cual se escribe $U \cong V$, si existe un isomorfismo entre ellos.

2. $\sim$ es simétrica, i.e., si $V \sim U$ ent. $U \sim V$.

Si ~~existe~~ $V \sim U$, ent. existe $f: V \to U$ isomorfismo y ya sabemos que $f^{-1}: U \to V$ también es un isomorfismo de U a V.

$\therefore$ $U \sim V$

3. $\sim$ es transitiva, i.e. si $V \sim U$ y $U \sim W$, ent. $V \sim W$.

Si $V \sim U$ ent. existe $f: V \to U$ iso y $U \sim W$ ent. existe $g: U \to W$ iso sabemos por el teo. ant. que $g \circ f: V \to W$ es un iso. $\therefore$ $V \sim W$

$\therefore$ $\sim$ es relación de equivalencia

me quedé para 200 definición 6.4

continuar con transf. inversas (después de inversa de una trans)

Ejemplos:

Composición

Sean $T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y

$T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, las transformaciones

dadas por $T_1(x,y,z) = (2x+6y-3z,$
$5x-3y+8z)$

$T_2(x,y) = (2x+5y, -x+6y)$

Entonces

$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = T_2(T_1(x,y,z)) =$

$T_2(2x+6y-3z, 5x-3y+8z) =$

$(2(2x+6y-3z)+5(5x-3y+8z),$

$-(2x+6y-3z)+6(5x-3y+8z)) =$

$(4x+12y-6z+25x-15y+40z,$

$-2x-6y+3z+30x-18y+48z)$

$= (29x-3y+34z, 28x-24y+51z)$

Ahora tomamos $\beta_1 = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $\beta_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Comprobemos que $[T_2 \circ T_1]_{\beta_1\beta_2} = [T_2]_{\beta_2}[T_1]_{\beta_1\beta_2}$

Primero calculemos $[T_1]_{\beta_1\beta_2}$

$T_1(1,1,1) = (2+6-3,\ 5-3+8)$
$= (5, 10)$

$T_2(1,0,1) = (2-3,\ 5+8) = (-1, 13)$

$T_3(0,1,1) = (6-3,\ -3+8) = (3, 5)$

Como β_2 es canónica, entonces

$$[T_1]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 10 & 13 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Ahora calculemos $[T_2]_{\beta_2}$

$T_2(1,0) = (2, -1)$

$T_2(0,1) = (5, 6)$ ent como β_2 es canónica

$$[T_2]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ent

$$[T_2]_{\beta_2}[T_1]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 10 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+50 & -2+65 & 6+25 \\ -5+60 & 1+78 & -3+30 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 60 & +63 & 31 \\ 55 & 79 & 27 \end{bmatrix}$$

Calculemos $[T_2 \circ T_1]_{\beta_1\beta_2}$

$(T_2 \circ T_1)(1,1,1) = (29-3+34,\ 28-24+51)$
$= (60, 55)$

$(T_2 \circ T_1)(1,0,1) = (29+34,\ 28+51)$
$= (63, 79)$

$(T_2 \circ T_1)(0,1,1) = (-3+34,\ -24+51)$
$= (31, 27)$

como β_2 es canónica, tenemos que

$$[T_2 \circ T_1]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 60 & 63 & 31 \\ 55 & 79 & 27 \end{bmatrix}$$

$\therefore [T_2 \circ T_1]_{\beta_1\beta_2} = [T_2]_{\beta_2}[T_1]_{\beta_1\beta_2}$

$\sum a_i x_i \quad \sum a_i e_i$

Inversa:

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to P_1$ la transformación $T(a,b) = a + b + (2a+3b)x$.

¿T es invertible?

Primero se tiene que ver que T es lineal ✓

Ahora, si T fuera invertible, debería existir una transformación lineal $S: P_1 \to \mathbb{R}^2$ y

① $S \circ T = Id_{\mathbb{R}^2}$ y

② $T \circ S = Id_{P_1}$

Para 1 queremos que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$(a,b) = Id_{\mathbb{R}^2}(a,b) = (S \circ T)(a,b) =$

$S(T(a,b)) = S(a+b+(2a+3b)x)$

Tomemos $a+b = \gamma$ y $2a+3b = \delta \Rightarrow$

$a = 3\gamma - \delta$ y $b = \delta - 2\gamma$

Entonces $S: P_1 \to \mathbb{R}^2$ tendría que ser

$S(\gamma + \delta x) = (3\gamma - \delta, \delta - 2\gamma)$

Para ver que S es la inversa de T debemos verificar que S es lineal y $T \circ S = Id_{P_1}$

Primero S es lineal ✓

$(T \circ S)(a+bx) = T(S(a+bx)) =$

$T(3a-b, b-2a) =$

$3a - \cancel{b} + \cancel{b} - 2a + (6a - 2b + 3b - 6a)x$

$= a + bx$

$\therefore T \circ S = Id_{P_1}$

$\therefore$ T es invertible y su inversa es S.

Isomorfismo:

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Entonces $V \cong \mathbb{R}^n$.

Dem.

Sea $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V fija. Definamos $f: V \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

Para $v \in V$ escribimos $f(v) = (v)_\beta$,
es decir, (el vector de coordenadas de v
respecto a la base β)
Afirmamos que f es un isomorfismo
entre V y $\mathbb{R}^n$.
- f es inyectiva, pues sabemos que si
β es una base del espacio vectorial V es
una base de V si y sólo si cada
vector $v \in V$ es expresado de manera única
como una combinación lineal de los
vectores de β.
- f es sobreyectiva.
Dado $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos
$v \in V$ como
$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$
así tenemos que $f(v) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

Falta ver que f cumple con las condiciones 1 y 2 de la def de Iso.
P.D. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
Sean $u, v \in V$ y digamos que
$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$
$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$
así tenemos que
$$v+u = (\alpha_1+\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)v_n$$
Entonces
$$f(v+u) = f((\alpha_1+\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)v_n) =$$
$$(\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n) =$$
$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = f(v) + f(u)$$
Sea $c \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ y
$v = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n$ ent
$$cv = c(\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n) =$$
$$c\gamma_1 v_1 + \dots + c\gamma_n v_n \Rightarrow$$
$$f(cv) = f(c\gamma_1 v_1 + \dots + c\gamma_n v_n) =$$
$$(c\gamma_1, \dots, c\gamma_n) = c(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = c f(v)$$ //

Isomorfismo

Ya definimos un isomorfismo como una transformación lineal y biyectiva.
Ahora lo definiremos respecto a la inversa de una transformación.

Def.

Un isomorfismo es una transformación lineal invertible.

Mostraremos un recíproco al teorema que dice que 2 espacios vectoriales con la misma dimensión son isomorfos.

Teorema.

Supongamos que V es un espacio vectorial isomorfo al espacio vectorial U. Entonces V es de dimensión finita si, y solo si U es de dimensión finita y $\dim(V) = \dim(U)$.

Dem.

Como U y V son isomorfos, entonces existe $T: V \to U$ un isomorfismo de V a U.

$\Rightarrow$] Supongamos que $\dim(V)$ es finita.

Por el teorema de la dimensión sabemos que $\operatorname{Ran}(T) + \operatorname{Nul}(T) = \dim(V)$. Como T es inyectiva (por ser iso) tenemos que $(\operatorname{Nul}(T) = 0)$, es decir, $\operatorname{Nul}(T) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(T) = \dim(V)$.

Como T es sobreyectiva tenemos que $\operatorname{Im}(T) = U \therefore \operatorname{Rango}(T) = \dim(\operatorname{Im}(T))$
$= \dim(U) = \dim(V)$.

$\therefore$ la dimensión de U es finita y es igual a la dim de V.

$\Leftarrow$] Consideremos $T^{-1}: U \to V$ la cual también es un isomorfismo.

Sea $\dim(U)$ es finita.
Como T^{-1} es inyectiva $\Rightarrow \dim(\operatorname{Rango}(T)) = \dim(U)$

Como T^{-1} es sobreyectiva sabemos que

$\operatorname{Im}(T^{-1}) = V \Rightarrow \dim(V) = \operatorname{rango}(T^{-1}) = \dim(\operatorname{Im}(T^{-1})) = \dim(U)$

$\therefore \dim(V)$ es finita y es igual a $\dim(U)$

Corolario
Dos espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

Corolario
Sea V un espacio vectorial de dim finita y sea $T: V \to U$ una trans lineal.
Una condición necesaria (no suficiente) para que la transformación T sea invertible es que U sea de dim finita y que $\dim(U) = \dim(V)$.

Recordando el teorema que dice que si T es invertible $\Leftrightarrow$ T es inyectiva y sobreyectiva, tenemos que una transformación no es invertible por dos causas independientes:

T no es inyectiva ó sólo T no es sobre.

Si T no es inyectiva no hay manera de definir $T^{-1}: U \to V$ pues en este caso existirían $v_1, v_2 \in V$ t.q. $T(v_1) = T(v_2) = u_0 \in U$ de modo que $T^{-1}(u_0)$ no estaría bien definido.

Sin embargo, si T no es sobreyectiva, pero sí es inyectiva, se podría modificar su codominio de modo que T sea invertible.
A las transformaciones lineales que son inyectivas (pero no sobre) reciben un nombre especial.

Def.
Se dice que la transformación lineal $T: V \to U$ es $\boxed{\text{no singular}}$ si T es inyectiva ($\ker(T) = \{0\}$).

Entonces, toda transformación lineal invertible es $\boxed{\text{no singular.}}$

La afirmación recíproca no es cierta.

Pues si tomamos $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $T(x,y) = (x,y,x)$.

Si $(x,y,x) = 0 \Rightarrow x = y = 0$ $\therefore$ $\mathrm{Nuc}(T) = \{0\}$
ent. T es singular.
Pero T no puede ser invertible pues $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Teorema:
Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim V = \dim U$.
Las sig. afirmaciones acerca de la transf. lineal $T: V \to U$ son equivalentes:

1. T es invertible (T es un isomorfismo)
2. T es sobreyectiva
3. T es inyectiva

4. T es no singular.

5. Si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en V, ent. $\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ es un conjunto de vectores lin. ind. en U.

5. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es una base de U.

Demostraremos $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$

Dem.

$1 \Rightarrow 2$) Por teorema T es inv. $\Leftrightarrow$ T es iny. y sobre. ✓

$2 \Rightarrow 3$) T es sobreyectiva $\Rightarrow$ $Im(T) = U$ y $rang(T) = dim(T) = dim(U) = dim(V)$ $\Rightarrow$ teorema de la dimensión $dim(N(T)) = 0$ $\Rightarrow$ $N(T) = \{0\}$
$\therefore$ T es inyectiva. ✓

$3 \Rightarrow 4$) T es inyectiva $\Rightarrow$ T es no singular ✓

$4 \Rightarrow 5$)

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores lin. independientes en V.

Consideremos la combinación lineal

$c_1(T(v_1)) + \dots + c_k(T(v_k)) = 0 \Rightarrow$

$T(c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k) = 0$ ya que T es lineal

Como T es no singular $\Rightarrow$

$c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$ pues $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un conj. lin. ind.

$\therefore$ $\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ es un conj. lin. ind.

$5 \Rightarrow 6$)

Sea $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V.
(Ent. $dim V = dim U = n$)
Como β es base de V ent. los v_i's son lin. ind. El conjunto de vectores
$\beta' = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es un conjunto lin. ind. en U por hip. Como $dim U = n$ $\Rightarrow$ β' es una base de U.

$6 \Rightarrow 1$)
Sea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V por hip. tenemos que $\beta' = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es una base de U.

Sea $u \in U$. Entonces existen $c_1, \dots, c_n$ escalares tales que $u = c_1T(v_1) + \dots + c_nT(v_n) = T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n)$
Escribamos $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$.
Entonces para cada $u \in U$ existe $v \in V$ t. $T(v) = u$
$\therefore$ T es sobreyectiva
Ahora
Supongamos que $v = d_1v_1 + \dots + d_nv_n$ es un vector del núcleo de T $\Rightarrow$

$T(v) = T(d_1v_1 + \dots + d_nv_n) = d_1T(v_1) + \dots + d_nT(v_n) = 0$
$\Rightarrow d_1 = \dots = d_n = 0$ (β' es lin. independiente)
$\Rightarrow v = 0$ $\therefore$ $N(T) = \{0\}$ $\therefore$ T es inyectiva
$\therefore$ T es isomorfismo $\therefore$ T es invertible

Inversa de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

4. $T(x,y) = (5x-2y,\ 3x+y)$

1. Mostrar que T es lineal (Tarea ☺)
2. Mostrar que existe $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\exists$

$S \circ T = Id_{\mathbb{R}^2}$

$T \circ S = Id_{\mathbb{R}^2}$

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ queremos que

$S \circ T(a,b) = (a,b)$ ent.

$(a,b) = Id_{\mathbb{R}^2}(a,b) = S \circ T(a,b) =$

$S(T(a,b)) = S(5x-2y,\ 3x+y)$

llamemos $\alpha = 5x - 2y$ y $\beta = 3x+y$

$\Rightarrow y = \beta - 3x \Rightarrow$

$\alpha = 5x - 2(\beta - 3x) = 5x - 2\beta + 6x$

$11x - 2\beta$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\alpha + 2\beta}{11} = x} \Rightarrow y = \beta - \dfrac{3}{11}(\alpha + 2\beta)$

$= \dfrac{11\beta - 3\alpha - 6\beta}{11} = \dfrac{5\beta - 3\alpha}{11}$

Definamos $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$S(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{\alpha + 2\beta}{11},\ \dfrac{5\beta - 3\alpha}{11}\right)$

Para que S sea inversa de T, debe cumplir que $T \circ S = Id_{\mathbb{R}^2}$, sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$T \circ S(a,b) = T(S(a,b)) =$

$T\left(\dfrac{a + 2b}{11},\ \dfrac{5b - 3a}{11}\right) =$

$\left(\dfrac{5a + 10b - 10b + 6a}{11},\ \dfrac{3a + 6b + 5b - 3a}{11}\right)$

$= \left(\dfrac{11a}{11},\ \dfrac{11b}{11}\right) = (a,b)$

$\therefore$ $T \circ S = Id_{\mathbb{R}^2}$,

$\therefore$ T es invertible con inversa $S(a,b) = \left(\dfrac{a+2b}{11},\ \dfrac{5b-3a}{11}\right)$

Teorema:

Sean U y V espacios vectoriales de la misma dimensión (finita), la transformación lineal $T: V \to U$ es invertible si y sólo si la matriz de la transformación T respecto de cualesquiera bases de V y U, es una matriz invertible.

Dem.

$\Rightarrow$) Supongamos que T es invertible.

Entonces existe una transformación lineal $S: U \to V$ tal que $T \circ S = Id_U$ y $S \circ T = Id_V$

Sean β_1 y β_2 bases de V y U, resp.

Observemos que

$$[Id_V]_{\beta_1} = I \quad \text{y} \quad [Id_U]_{\beta_2} = I$$

$$\Rightarrow I = [Id_V]_{\beta_1} = [S \circ T]_{\beta_1} = [S]_{\beta_2\beta_1}[T]_{\beta_1\beta_2}$$

$$I = [Id_U]_{\beta_2} = [T \circ S]_{\beta_2} = [T]_{\beta_1\beta_2}[S]_{\beta_2\beta_1}$$

$\Rightarrow$ que $[T]_{\beta_1\beta_2}$ es una matriz invertible.

$\Leftarrow$) Supongamos que $A = [T]_{\beta_1\beta_2}$ es invertible

Consideremos la transformación $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n = \dim V = \dim U$, dada por $T_A(X) = AX$

y sean $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$ y $\psi: U \to \mathbb{R}^n$ los isomorfismos naturales $\varphi(v) = (v)_{\beta_1}$ y $\psi(u) = (u)_{\beta_2}$

Entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_A"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Ahora, si $X \in \mathbb{R}^n$ y pertenece al núcleo de $T_A \Rightarrow T_A(X) = AX = 0$. Como A es invertible, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial $X = 0$. $\Rightarrow$

$\operatorname{Ker} T_A = \{0\}$.

$Ker(T) \xrightarrow{T} 0_U \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}$

$\varphi \downarrow$

Por otra parte, sabemos que

$\varphi(Ker T) = Ker(T_A) \Rightarrow$

$\varphi(Ker T) = \{0\}$ $\therefore$ $Ker(T) = \{0\}$

$\Rightarrow$ por teo de las equivalencias que T es invertible.

Corolario

Si la transformacion $T: V \to U$ es invertible, entonces

$$[T^{-1}]_{\beta_2\beta_1} = [T]^{-1}_{\beta_1\beta_2}$$

en donde β_1 y β_2 son bases de V y U resp.

Dem.

Sea $S = T^{-1}$ de la dem ant tenemos que

$$[S]_{\beta_2\beta_1}[T]_{\beta_1\beta_2} = [T]_{\beta_1\beta_2}[S]_{\beta_2\beta_1} = I.$$

Definición:

Sea $T: V \to V$ un operador lineal en el espacio vectorial V de dimensión finita. Se llama <u>determinante</u> de T, denotado por $\det(T)$, al determinante de la matriz que representa a T en cualquier base de V.

Teorema

El operador lineal $T: V \to V$ donde V es un esp. vect. de dimensión finita, es invertible $\Leftrightarrow$ $\det(T) \neq 0$

T es invertible $\Leftrightarrow$ $[T]_{\beta\beta}$ es invertible $\Leftrightarrow$ $\det(T) \neq 0$.