Operaciones con Subespacios Vectoriales

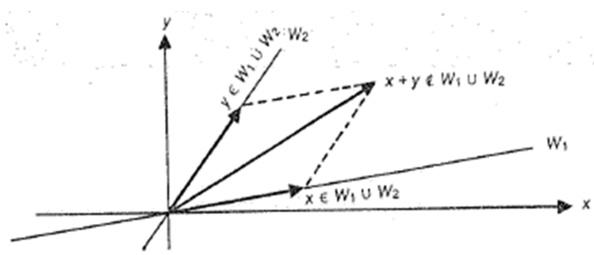
Proposición 1. *Sean W_1 y W_2 dos subespacios del espacio vectorial V, se tiene entonces que*
(1) La intersección de W_1 y W_2 definida como

$$W_1 \bigcap W_2 = \{v \in V \mid v \in W_1 \text{ y } v \in W_2\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Demostración. Como W_1 y W_2 son subespacios del espacio vectorial V, $0 \in W_1$ y $0 \in W_2$ por tanto $0 \in W_1 \bigcap W_2$
Si $x, y \in W_1 \bigcap W_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $x, y \in W_1$ y $x, y \in W_2$, por ser W_1 y W_2 subespacios de V se tiene que $x + y \in W_1$ $x + y \in W_2$ por lo tanto $x + y \in W_1 \bigcap W_2$
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in W_1 \bigcap W_2$ al ser subespacios de V se tiene $\lambda x \in W_1$ y $\lambda x \in W_2$ por tanto $\lambda x \in W_1 \bigcap W_2$ por lo que $W_1 \bigcap W_2$ es un subespacio vectorial □

La unión de dos subespacios de un espacio vectorial V no es en general un subespacio de V. Como se puede ver en la figura siguiente, donde V es $\mathbb{R}^2$



Al tomar $x \in W_1$ y $y \in W_2$ se tiene que $x, y \in W_1 \bigcup W_2$ y, sin embargo $x + y \notin W_1 \bigcup W_2$

Teorema 1. *Sean W_1 y W_2 dos subespacios del espacio vectorial V. Si $W_1 \bigcup W_2$ es subespacio de V, entonces $W_1 \subset W_2$ ó $W_2 \subset W_1$*

Demostración. Supóngase que $W_1 \not\subset W_2$ y probaremos que $W_2 \subset W_1$. $W_1 \not\subset W_2$ existe un vector $y \in W_1$, tal que $y \notin W_2$. Entonces se tiene que $x \in W_2 \subset W_1 \bigcup W_2$ y $y \in W_1 \subset W_1 \bigcup W_2$.
Como $W_1 \bigcup W_2$ es subespacio de V, se concluye que $x + y \in W_1 \bigcup W_2$, es decir $x + y \in W_1$ ó $x + y \in W_2$.
Se tiene que $x + y \notin W_2$, pues en caso contrario, ya que $x \in W_2$ se tendría $(x + y) + (-x) \in W_2$, o sea $y \in W_2$ lo cual es una contradicción a la elección de y.
Entonces $x + y \in W_1$. Pero $y \in W1$, entonces $(x + y) + (-y) \in W_1$ o sea $x \in W_1$, lo que prueba que $W_2 \subset W_1$ □

Proposición 2. *Sean W_1 y W_2 dos subespacios del espacio vectorial V, se tiene entonces que*
(1) La suma de W_1 y W_2 definida como

$$W_1 + W_2 = \{v \in V \mid v = w_1 + w_2 \; w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Demostración. $0 \in W_1 + W_2$ pues $0 = 0 + 0$ con $0 \in W_1$ y $0 \in W_2$
Si $x, y \in W_1 + W_2$ entonces existen $w_1, w_1' \in W_1$ y $w_2, w_2' \in W_2$ tal que

$$x = w_1 + w_2, \qquad y = w_1' + w_2'$$

se tiene entonces que

$$x + y = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = (w_1 + w_1') + (w_2 + w_2')$$

pero como $w_1 + w_1' \in W_1$ y $w_2 + w_2' \in W_2$, pues tanto W_1 y W_2 son subespacios de V. Entonces $x + y \in W_1 + W_2$.
Similarmente

$$\lambda x = \lambda(w_1 + w_2) = \lambda w_1 + \lambda w_2$$

en donde $\lambda w_1 \in W_1$ y $\lambda w_2 \in W_2$ de modo que $\lambda x \in W_1 + W_2$.
Por tanto $W_1 + W_2$ es un subespacio de V. $\square$

Teorema 2. *Sean W_1 y W_2 dos subespacios del espacio vectorial V. Entonces*

$$W_1 + W_2 = \pounds(W_1 \bigcup W_2)$$

(es decir el subespacio generado por $W_1 \bigcup W_2$ es $W_1 + W_2$).

Demostración. Se tiene que $W_1 \bigcup W_2 \subset W_1 + W_2$ y sabemos que $W_1 + W_2$ es un subespacio de V. por lo tanto

$$\pounds(W_1 \bigcup W_2) \subset W_1 + W_2$$

Tomamos ahora un vector $x = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$. Se tiene que $w_1 \in W_1 \subset W_1 \bigcup W_2$ y $w_2 \in W_2 \subset W_1 \bigcup W_2$. Como en $\pounds(W_1 \bigcup W_2)$ estan todas las combinaciones lineales de vectores de $W_1 \bigcup W_2$. Entonces

$$x = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \in \pounds(W_1 \bigcup W_2)$$

esto prueba que $W_1 + W_2 \subset \pounds(W_1 \bigcup W_2)$ $\square$

Definición 1. *Sean W_1 y W_2 dos subespacios del espacio vectorial V. La suma $W_1 + W_2$ es llamada suma directa de W_1 y W_2, denotada*

$$W_1 \oplus W_2$$

si cada vector en el subespacio $W_1 + W_2$ tiene una única representación como la suma de un vector en W_1 y un vector W_2.

Teorema 3. *Sean W_1 y W_2 dos subespacios del espacio vectorial V. Escriba $U = W_1 + W_2$. Las dos siguientes condiciones son equivalentes*
a) $U = W_1 \oplus W_2$
b) $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$

Demostración. $1 \Rightarrow 2$
Ciertamente $W_1 \bigcap W_2 \subset W_1 + W_2$.
Sean $x \in W_1 \bigcap W_2$. Como $x \in W_1$ escribase

$$x = x + 0 \in W_1 + W_2$$

Similarmente, como $x \in W_2$, escribase

$$x = 0 + x \in W_1 + W_2$$

Ahora bien, el vector x como elemento de $W_1 + W_2$ tiene una única representación en este subespacio. Comparando entonces las expresiones anteriores

$$x = x + 0$$
$$x = 0 + x$$

se concluye que $x = 0$. Es decir, $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$
$2 \Rightarrow 1$
Supóngase que $x \in W_1 + W_2$ tiene dos representaciones distintas, dígase

$$x = w_1 + w_2$$
$$x = w_1' + w_2'$$

Entonces

$$w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$$

o bien,

$$w_1 - w_1' = w_2' - w_2$$

ahora bien, $w_1 - w_1'$ pertenece a W_1 (pues $w_1 y w_1'$ pertenecen a W_1 y éste es un subespacio de V).
Similarmente $w_2' - w_2$ pertenece a W_2. Por tanto, $w_1 - w_1'$ pertenece tanto a W_1 como a W_2 (pues $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$).
Entonces $w_1 - w_1' \in W_1 \bigcap W_2$. Pero $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$, lo que permite concluir que $w_1 = w_1'$. Con un argumento similar se muestra que $w_2 = w_2'$, y por tanto la representación de $x \in W_1 + W_2$ es única. $\square$

Ejemplo Considérese el espacio F(R) (esto es, el espacio de todas las funciones reales definidas en la recta $\mathbb{R}$. Sean W_1 y W_2 los siguientes subconjuntos de F(R)

$$W_1 = \{f \in F(R) \mid f(x) = f(-x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{f \in F(R) \mid f(x) = -f(-x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Sea f un vector cualquiera de F(R).
Definimos las funciones g y h como:

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \qquad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

observamos que

$$g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$$

$$h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = h(-x)$$

O sea que $g \in W_1$ y $h \in W_2$.
Pero $f = g + h$, lo que muestra entonces que

$$F(R) = W_1 + W_2$$

Ahora bien supóngase que $\varphi \in W_1 \bigcap W_2$. Entonces para $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\varphi(-x) \underbrace{=}_{\varphi \in W_1} \varphi(x) \underbrace{=}_{\varphi \in W_2} -\varphi(-x)$$

de donde $\varphi(x) = 0$, esto es, φ es la función cero.
Entonces se tiene de hecho

$$F(R) = W_1 \oplus W_2$$