Coeficientes de Fourier

Definición 1. *Sea β un subconjunto ortonormal de un espacio V con producto escalar, y sea $x \in V$. Definimos los coeficientes de Fourier de x relativos a β como los escalares $\langle x, y\rangle$, donde $y \in \beta$*

Ejemplo Sea $V = \mathbb{R}^2$ y β una base ortonormal de V dada por

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Calcular los coeficientes de Fourier para $(3,4)$ relativos a β
En este caso

$$\left\langle (3,4), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = (3,4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

y también

$$\left\langle (3,4), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = (3,4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo Sea $V = \mathbb{R}^3$ y β una base ortonormal de V dada por

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

Calcular los coeficientes de Fourier para $(1,1,2)$ relativos a β
En este caso

$$\left\langle (1,1,2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = (1,1,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y también

$$\left\langle (1,1,2), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\rangle = (1,1,2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

finalmente

$$\left\langle (1,1,2), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle = (1,1,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$$

El espacio H Un espacio del producto escalar muy importante que se parece a $C[0,1]$ es el espacio H de funciones continuas de valor complejo definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$ con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

Observaciones Sobre la integración de funciones de valor complejo.

1. El número imaginario i puede ser considerado como una constante bajo el signo de integración.

2. Toda función de valor complejo f puede escribirse como
$$f = f_1 + i\ f_2$$
donde f_1, f_2 son funciones de valor real.
3. Se tiene que
$$\int f = \int f_1 + i \int f_2$$
y tambiém
$$\overline{\int f} = \int \overline{f}$$

De estas observaciones, así como de la suposición de continuidad, se tiene que H es un espacio con producto interior.

Un conjunto ortonormal en H Defínase
$$S = \{e^{ijx} \mid j\ es\ un\ entero\}$$
Se tiene entonces que
$$\begin{aligned}\langle e^{ijx}, e^{ikx}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}\overline{e^{ikt}}\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}e^{-ikt}\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi i(j-k)}e^{i(j-k)t}\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$
También se tiene
$$\langle e^{ijx}, e^{ijx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}\overline{e^{ijt}}\ dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-j)t}\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ dt = 1$$
es decir $\|e^{ijx}\| = 1$. Se tiene entonces que S es un conjunto ortonormal de H.

Ejemplo Sean $V = H$ y $f(x) = x$. Calculemos los coeficientes de Fourier de f relativos al conjunto ortonormal
$$S = \{e^{ijx} \mid j\ es\ un\ entero\}$$
En este caso se tiene
$$\langle f, e^{inx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\ \overline{e^{int}}\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-int}\ dt = \frac{-1}{in}$$
Para el caso $n = 0$ se trabajará
$$\langle f, e^{i0x}\rangle = \langle f, 1\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\ (1)\ dt = \pi$$