Complemento Ortogonal

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial con producto interno $(V, \langle , \rangle)$ y sea W un subespacio de V. Al conjunto*

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0\}$$

se le llama ***complemento ortogonal de W***

Teorema 1. *Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea W un subespacio de V. Entonces*

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Demostración. Sea $\beta_1 = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ $(k \leq \dim\ V)$ una base del subespacio W. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, se puede construir a partir de β_1 una base ortonormal

$$\beta_1' = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$$

de W. Se extiende esta base a una base β de V y se aplica nuevamente el proceso de Gram-Schmidt a la base β para obtener una base ortonormal β' de V.
Se tiene que los primeros k vectores de β' son $u_1, u_2, ..., u_k$ (los vectores de la base ortonormal de W). Es decir

$$\beta' = \{u_1, u_2, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$$

donde $n = \dim\ V$. Veremos que los vectores $u_{k+1}, ..., u_n$ forman una base ortonormal de $W^{\perp}$
(1) Se tiene que los vectores $u_{k+1}, ..., u_n$ son linealmente independientes.
Sea $v \in W^{\perp}$. Como $v \in V$, existen escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ tales que

$$v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k + c_{k+1}u_{k+1} + \cdots + c_nu_n = \sum_{i=1}^{n} c_ju_j$$

Ya que $\langle v, u_i\rangle = 0$ para $i = 1, ..., k$ se tiene

$$0 = \langle v, u_i\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_ju_j, u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j\langle u_j, u_i\rangle = c_i$$

Entonces

$$v = c_{k+1}u_{k+1} + \cdots + c_nv_n$$

lo que muestra que los vectores $u_{k+1}, ..., u_n$ generan $W^{\perp}$ y por lo tanto constituyen una base de el.
Dado entonces cualquier vector $v \in V$ puede expresarse como

$$v = \underbrace{c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k}_{\in W} + \underbrace{c_{k+1}u_{k+1} + \cdots + c_nu_n}_{\in W^{\perp}}$$

es decir

$$V = W + W^{\perp}$$

Supongamos que $w \in W \bigcap W^{\perp}$ entonces $\langle w, w\rangle = 0$, lo cual implica que $w = 0$. Es decir, que

$$W \bigcap W^{\perp} = \{0\}$$

y por lo tanto
$$V = W \oplus W^{\perp}$$
□

Ejercicio Sea $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ una base ortonormal del subespacio W. Entonces todo vector $v \in V$ se puede escribir de manera única como
$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in W, \ v_2 \in W^{\perp}$$
en donde
$$v_1 = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i$$
y $v_2 = v - v_1$

Solución Al ser v_1 una combinación lineal de los vectores de la base β de W entonces $v_1 \in W$.
Vamos a ver que $v_2 = v - v_1 \in W^{\perp}$
Si $w \in W$ se tiene
$$w = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j$$
por lo que
$$\begin{aligned}
\langle v_2, w \rangle = \langle v - v_1, w \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^{k} c_j u_j \right\rangle \\
&= \left\langle v, \sum_{j=1}^{k} c_j u_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^{k} c_j u_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k} c_j \langle v, u_j \rangle - \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k} c_j \langle v, u_j \rangle - \sum_{j=1}^{k} c_j \langle v, u_j \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$
por lo tanto $v_2 \in W\perp$

Ejemplo Considere el espacio $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico. Sea $W = L(w_1, w_2)$ en donde
$$w_1 = (1, 1, 0, 0), \quad w_2 = (0, 1, 0, 1)$$
Suponga que se quiere expresar el vector $v = (2, 3, -1, 4) \in \mathbb{R}^4$ como $v = v_1 + v_2$, en donde $v_1 \in W$ y $v_2 \in W^{\perp}$.
(1) Sea $\beta = \{u_1, u_2\}$ una base de W.
(2) Con el proceso de Gram-Schmidt se construye una base ortonormal, en este caso
$$u_1 = \frac{1}{\|(1, 1, 0, 0)\|}(1, 1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$$

por otro lado

$$v_2 - \langle v_1, u_1\rangle u_1 = (0,1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

y por lo tanto

$$u_2 = \frac{1}{\|\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)\|}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

Entonces

$$\beta = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)\right\}$$

es una base ortonormal de W.
El vector $v_1 \in W$ será

$$\begin{aligned} v_1 &= \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 \\ &= \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0) + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right) \\ &= \frac{5}{2}(1,1,0,0) + 3\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right) = (1,4,0,3) \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$v_2 = v - v_1 = (2,3,-1,4) - (1,4,0,3) = (1,-1,-1,1)$$

en donde $(1,4,0,3) \in W$ y $(1,-1,-1,1) \in W\perp$

Aplicación a los sistemas de ecuaciones

Considérese el sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incognitas

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

Sean c_i, definidos como

$$c_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \in \mathbb{R}^n \qquad i = 1, ..., n$$

Con el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$, el sistema de ecuaciones puede verse como

$$\begin{gathered} \langle c_1, X\rangle = 0 \\ \langle c_2, X\rangle = 0 \\ \cdots \\ \langle c_n, X\rangle = 0 \end{gathered}$$

en donde $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores $c_1, c_2, ..., c_n$.
Obsérvese que $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es solución del sistema si y solo si $X \in W^\perp$.
Es decir, que $W^\perp$ es precisamente el espacio solución del sistema.