

Determinantes

Sea A la matriz cuadrada de orden n siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El determinante de A , denotado $\det A$, está definido por la fórmula

$$\det A = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

donde cada suma se hace sobre las $n!$ permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$

Ejemplo Para la matriz A de 2×2 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Sobre el conjunto $S = \{1, 2\}$ se tiene

PERMUTACIONES	SGN σ	PRODUCTO $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$	$(\text{sgn } \sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$
(1,2)	1	$a_{11}a_{12}$	$a_{11}a_{12}$
(2,1)	-1	$a_{12}a_{21}$	$-a_{12}a_{21}$

en donde

$$\sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$$

o sea

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo Para la matriz A de 3×3 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ se tiene

PERMUTACIONES	SGN σ	PRODUCTO $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$	$(sgn \sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$
(1,2,3)	1	$a_{11}a_{22}a_{33}$	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(2,3,1)	1	$a_{12}a_{23}a_{31}$	$a_{12}a_{23}a_{31}$
(3,1,2)	1	$a_{13}a_{21}a_{32}$	$a_{13}a_{21}a_{32}$
(1,3,2)	-1	$a_{11}a_{23}a_{32}$	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
(2,1,3)	-1	$a_{12}a_{21}a_{33}$	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
(3,2,1)	-1	$a_{13}a_{22}a_{31}$	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

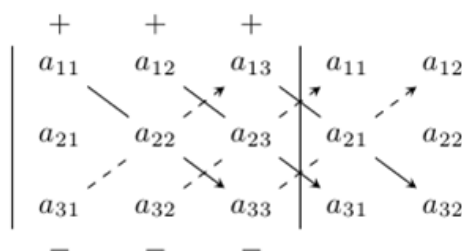
en donde

$$\sum_{\sigma} (sgn \sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

o sea

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

esquemáticamente



Ejemplo Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución En este caso

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = (2)(4) - (5)(3) = -7$$

Ejemplo Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución En este caso

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (9) + (32) + (-2) - (6) - (4) - (24) = -59$$

