El Determinante de un Producto de Matrices

Lema 1. *(i) Si E es una matriz elemental que provino de I_n intercambiando en ésta dos de sus líneas, entonces*

$$\det\ E = -1$$

(ii) Si E es una matriz elemental que provino de I_n multiplicando en ésta una de sus líneas por por c, entonces

$$\det\ E = c$$

(iii) Si E es una matriz elemental que provino de I_n sustituyendo en ésta una de sus líneas por ella misma más un multiplo de otra línea, entonces

$$\det\ E = 1$$

Lema 2. *Sea A una matriz de orden n y sea E una matriz elemental. Entonces*

$$\det(EA) = (\det\ E)(\det A)$$

Demostración. Si A' es la matriz que se obtiene de A realizando en esta una operación elemental, entonces según lo anterior $A' = EA$, donde E es la matriz elemental que provino de I_n realizando en ésta la misma operación elemental. Entonces

$$\det(EA) = \det\ A' = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ -1 \end{pmatrix} \det A = (\det\ E)(\det A)$$

□

Teorema 1. *Sean A y B dos matrices cuadradas. Entonces*

$$\det(AB) = (\det\ A)(\det B)$$

Demostración.

1. Caso 1. A es una matriz no invertible
   Supongamos que AB es una matriz inversible. En tal caso existiría una matriz C tal que $(AB)C = I_n$. Pero esta última expresión nos dice que A es inversible pues $A^{-1} = BC$ lo cual es una contradicción. Si $\det\ A = 0$ entonces $\det(AB) = 0$ y por tanto

   $$\det(AB) = 0 = 0 \cdot (\det\ B) = (\det\ A)(\det\ B)$$

2. A es una matriz inversible
   Tenemos entonces que la matriz A se puede escribir como el producto de matrices elementales

   $$A = E_1 E_2 \cdots E_k$$

   Entonces

   $$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k B) \underbrace{=}_{lema\ 2} (\det\ E_1) \det(E_2 \cdots E_k B)$$

   $$\underbrace{=}_{lema\ 2} (\det\ E_1)(\det\ E_2) \det(E_3 \cdots E_k B)$$

$$= \cdots = (\det\ E_1)(\det\ E_2)\cdots(\det\ E_k)(\det\ B)$$

Usando que

$$(\det\ E_1)(\det\ E_2)\cdots(\det\ E_k) = \det\ A$$

se tiene

$$(\det\ E_1)(\det\ E_2)\cdots(\det\ E_k)(\det\ B) = (\det\ A)(\det\ B)$$

□

Corolario 1. *La matriz A de orden n es inversible si, y solo si*

$$\det\ A \neq 0$$

Demostración. Probaremos el solo si. Supóngase que A es inversible. Entonces existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Por tanto,

$$\det(AA^{-1}) = \det\ I = 1$$

por lo tanto

$$(\det\ A)(\det\ A^{-1}) = 1$$

o sea, que det A es un factor de un producto que da por resultado 1. Entonces det $A \neq 0$ □

Corolario 2. *Si A es una matriz inversible*

$$(\det\ A^{-1}) = (\det\ A)^{-1} = \frac{1}{\det\ A}$$

Demostración. Según el corolario anterior

$$(\det\ A)(\det\ A^{-1}) = 1$$

por lo tanto

$$(\det\ A^{-1}) = (\det\ A)^{-1} = \frac{1}{\det\ A}$$

□