El Espacio de las Matrices

Las matrices son arreglos rectangulares de elementos. Muchas veces estos elementos son números reales

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El tamaño (orden) de una matriz está determinado por el número de renglones y de columnas. En general si la matriz tiene m renglones y n columnas decimos que su tamaño (orden) es $m \times n$.
Una matriz de $m \times n$ se escribe

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se suele denotar $M_{m\times n} = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ Las operaciones entre matrices se definen asi:

Definición 1. *Para la suma se tiene que dadas las matrices*

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Observación: La suma de matrices se ha definido para matrices del mismo orden.

Definición 2. *Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ y sea $k \in \mathbb{R}$ (un escalar). Se define el producto de la matriz A por el escalar k, denotado kA como la matriz $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ donde $c_{ij} = ka_{ij}$, es decir,*

$$kA = (ka_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

o bien

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Teorema 1. *Sean A,B y C tres matrices cualesquiera del mismo orden* $(m \times n)$ *con elementos* a_{ij}, c_{ij}, *respectivamente. Sean k,l dos escalares. Entonces*
(1) A+B=B+A

Demostración.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (b_{ij} + a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = B + A$$

□

(2) A+(B+C)=(A+B)+C

Demostración.

$$A + (B + C) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (A + B) + C$$

□

(3) Existe una matriz cero tal que $A + 0 = A$

Demostración.

$$A + 0 = (a_{ij} + 0_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = A$$

□

(4) Dada la matriz A, existe una matriz $-A$ *tal que* $A + (-A) = 0$ *(la matriz cero)*

Demostración.

$$A + (-A) = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (0_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = 0$$

□

(5) k(A+B)=kA+kB

Demostración.

$$k(A + B) = (k(a_{ij} + b_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (ka_{ij} + kb_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = kA + kB$$

□

(6) (k+l)A=kA+lA

Demostración.

$$(k + l)A = ((k + l)a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (ka_{ij} + la_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = kA + lA$$

□

(7) (kl)A=k(lA)

Demostración.

$$(kl)A = ((kl)a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (k(la_{ij}))_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = k(lA)$$

□

(8) 1A=A

Demostración.

$$1A = (1a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = A$$

□

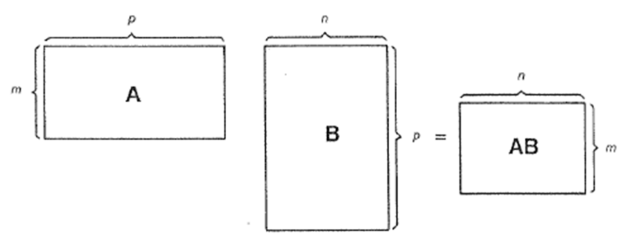
Definición 3. *Sea A una matriz de orden $m \times p$ con elementos a_{ij} y B una matriz de orden $p \times n$ con elementos b_{ij}. Se define el producto AB, como la matriz $m \times n$ $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ donde*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}$$

Observación: El producto de matrices se ha definido solo en el caso de que el número de columnas de A coincida con el número de renglones de B, esquemáticamente se ve así



Ejemplo Considere las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5) + 3(6) & 2(-2) + 3(8) \\ 4(5) + (-1)(6) & 4(-2) + (-1)8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 & 20 \\ 14 & -16 \end{bmatrix}$$

Existen razones para definir el producto de matrices como se hizo, por ejemplo supóngase que se tiene el sistema de 3 ecuaciones con 4 incognitas

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{gathered}$$

cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

y se quieren cambiar las variables x_1, x_2, x_3, x_4 de este sistema por las nuevas variables y_1, y_2 relacionadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + y_2 \\ x_2 &= -y_1 + 3y_2 \\ x_3 &= y_1 + y_2 \\ x_4 &= 3y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

cuya matriz asociada es

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Al hacer las sustituciones requeridas se obtiene

$$\begin{aligned} (2y_1 + y_2) + 2(-y_1 + 3y_2) + 6(y_1 + y_2) - (3y_1 - 2y_2) &= 0 \\ 2(2y_1 + y_2) - (-y_1 + 3y_2) + (y_1 + y_2 + (3y_1 - 2y_2) &= 0 \\ 3(2y_1 + y_2) - 2(-y_1 + 3y_2) + 2(y_1 + y_2 - 3(3y_1 - 2y_2) &= 0 \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} 3y_1 + 15y_2 &= 0 \\ 9x_1 - 2y_2 &= 0 \\ y_1 + 5y_2 &= 0 \end{aligned}$$

cuya matriz asociada es

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 9 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Resulta que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 9 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = C$$