El Espacio de las Matrices parte dos

También relacionado con sistemas de ecuaciones se puede ver que el producto de matrices tiene una gran ventaja para denotar matricialmente un sistema.
Considérese el sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

que se puede escribir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Teorema 1. *Sean A,B,C tres matrices de ordenes tales que las operaciones indicadas tienen sentido. Sea k un escalar. Entonces*
(1) A(BC)=(AB)C
(2) A(B+C)=AB+AC
(3) (A+B)C=AC+BC
(4) k(AB)=A(kB)
(5) IA=A
(6) 0A=A0=0

Demostración.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, \; A \in M_{m\times p} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix}, \; B \in M_{p\times r}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix}, \; B \in M_{r\times n}$$

para (1) tomamos el k-ésimo renglon de la matriz B y lo multiplicamos por la j-ésima columna de C

$$b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + \cdots + b_{kr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} = \beta_{kj}$$

tenemos entonces que β_{kj} es un elemento de la matriz (BC) que vamos a multiplicar por el i-ésimo renglon de la matriz A

$$a_{i1}\beta_{ij} + a_{i2}\beta_{2j} + \cdots + a_{ip}\beta_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\beta_{kj} = \theta_{ij}$$

Entonces

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{r} a_{ik}b_{ks}c_{sj}$$

Por otra parte un elemento (AB)C se puede obtener multiplicando el i-ésimo renglon de A por la s-ésima columna de B

$$a_{i1}b_{1s} + a_{i2}b_{2s} + \cdots + a_{ip}b_{ps} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ks} = \alpha_{is}$$

esto lo vamos a multiplicar por la j-ésima columna de la matriz C

$$\alpha_{i1}c_{1j} + \alpha_{i2}c_{2j} + \cdots + \alpha_{ir}c_{rj} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}c_{sj} = \rho_{ij}$$

se tiene entonces

$$\rho_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ks}c_{sj} = \theta_{ij}$$

□

Definición 1. *Si en una matriz $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ se tiene que $m = n$, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n*

Definición 2. *Dada la matriz cuadrada A de orden n, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ se dice que los elementos $(a_{ii})_{i=1,\dots,n}$ constituyen la diagonal principal de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A la matriz de orden n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en la cual todos sus elementos son cero, excepto los de la diagonal principal, que son uno, se le llama matriz identidad (de orden n), y se denota por I_n,. Así, por ejemplo

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 3. *Se dice que la matriz A es inversible si existe una matriz B (necesariamente del mismo orden que A) llamada inversa de A, tal que*

$$AB = BA = I$$

Ejemplo Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

tal que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

también se tiene

$$BA = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición 1. *Dada una matriz cuadrada A de orden $n \times n$, la inversa es única*

Demostración. Sean $B_1,\ B_2$ inversas de la matriz A. Entonces

$$B_1 = IB_1 = (B_2B)B_1 = B_2(BB_1) = B_2I = B_2$$

□