Matriz Inversa

Definición 1. *Se dice que la matriz A es inversible si existe una matriz B (necesariamente del mismo orden que A) llamada inversa de A, tal que*

$$AB = BA = I$$

Proposición 1. *Dada una matriz cuadrada A de orden $n \times n$, la inversa es única*

Demostración. Sean $B_1,\ B_2$ inversas de la matriz A. Entonces

$$B_1 = IB_1 = (B_2B)B_1 = B_2(BB_1) = B_2I = B_2$$

□

Proposición 2. *Si A es una matriz inversible, su inversa es también inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$*

Demostración. Se tiene que

$$(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = I$$

por otro lado

$$A \cdot A^{-1} = I$$

por lo que A y $(A^{-1})^{-1}$ son inversas de A^{-1} por la unicidad de la matriz inversa debe ocurrir

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

□

Proposición 3. *Si A y B son dos matrices inversibles del mismo orden, entonces AB también es inversible y*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Demostración. Se tiene

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

por otro lado

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Entonces $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB □

Definición 2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz cualquiera. Se define la potencia n-ésima de la matriz como*

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n-veces}$$

Se hace el convenio de que

$$A^0 = I$$

Si A es una matriz inversible, se puede también definir potencias negativas de A

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

Corolario 1. *Si A es una matriz inversible, A^n es inversible y*

$$(A^n)^{-1} = A^{-n}$$

Demostración. Se tiene que

$$(A^n)^{-1} \cdot A^n = I$$

por otro lado

$$\begin{aligned} A^{-n}A^n &= (A^{-1})^n A^n \\ &= \underbrace{(A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1})}_{n-veces}\underbrace{(AA \cdots A)}_{n-veces} \\ &= \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{(n-1)-veces}(A^{-1}A) \quad \underbrace{A \cdots A}_{(n-1)-veces} \\ &= \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{(n-1)-veces}(I) \quad \underbrace{A \cdots A}_{(n-1)-veces} \end{aligned}$$

continuando el proceso

$$= I$$

por tanto A^n es inversible y

$$(A^n)^{-1} = A^{-n}$$

□

Teorema 1. *Si A es una matriz inversible y k es un escalar distinto de cero, entonces kA también es inversible y*

$$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$$

Demostración. Se tiene que

$$(k^{-1}A^{-1})(kA) = (k^{-1}k)A^{-1}A = 1 \cdot I = I$$

por otro lado

$$(ka)(k^{-1}A^{-1}) = (kk^{-1})AA^{-1} = 1 \cdot I = I$$

por lo tanto

$$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$$

□

Ejemplo La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

tiene la matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces la inversa de la matriz

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -6 & 27 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$\frac{1}{3}A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Teorema 2. *Si la matriz A es inversible, entonces el sistema homogéneo de ecuaciones lineales*

$$AX = 0$$

tiene solo la solución trivial

Demostración. Supóngase que A es inversible y considérese el sistema homogéneo $AX = 0$. Sea $\widetilde{X}$ cualquier solución del sistema, esto es,

$$A\widetilde{X} = 0$$

$$\Rightarrow\ A^{-1}A\widetilde{X} = A^{-1}0$$

$$\Rightarrow\ \widetilde{X} = 0$$

es decir la única solución del sistema es la trivial □

Teorema 3. *Sea A una matriz cualquiera.*
(1) Si existe B tal que BA=I, entonces A es inversible (y $B = A^{-1}$).
(2) Si existe C tal que $AC = I$, entonces A es inversible (y $C = A^{-1}$).

Demostración. Considérese el sistema de ecuaciones $AX = 0$. Sea $\widetilde{X}$ una solución de él, esto es,

$$A\widetilde{X} = 0$$

$$\Rightarrow\ BA\widetilde{X} = B0$$

$$\Rightarrow\ \widetilde{X} = 0$$

Entonces el sistema $AX = 0$ tiene solo la solución trivial. En ese caso A es inversible. Por otro lado

$$BA = I$$

$$\Rightarrow\ BAA^{-1} = IA^{-1}$$

$$\Rightarrow\ B = A^{-1}$$

(2) analogo □

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Se quiere determinar bajo qué condiciones esta matriz es inversible y, en tal caso, obtener una fórmula para su inversa.
Se quiere entonces hallar una matriz

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al hacer la multiplicación indicada e igualando los elementos correpondientes, se obtiene el par de sistemas de dos ecuaciones con 2 incognitas

$$\begin{cases} ax_1 + bx_3 = 1 \\ cx_1 + dx_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_2 + bx_4 = 1 \\ cx_2 + dx_4 = 0 \end{cases}$$

Éste sistema tiene solución si $ad - bc \neq 0$, en cuyo caso

$$x_1 = \frac{d}{ad - bc}, \quad x_3 = \frac{-c}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{-b}{ad - bc}, \quad x_4 = \frac{a}{ad - bc}$$

De tal manera, entonces, si $ad - bc \neq 0$, la matriz A es inversible y su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ac - bd} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$