Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición 1. *Se llama ecuación lineal en las incognitas (o indeterminadas) $x_1, x_2, ..., x_n$ a una ecuación de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales dados.
Al número a_i que multiplica a la icognita x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ se le llama coeficiente de la incognita correspondiente. Al número b se le llama término independiente de la ecuación.
Si $b = 0$, se dice que la ecuación es homogenea. En caso contrario, se dice que es no homogenea.

Definición 2. *Al conjunto de m ecuaciones lineales*

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

en donde $a_{ij},\ b_i\ (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ son números dados, se le llama sistema de m ecuaciones lineales en las n incognitas $x_1, x_2, ..., x_n$. Si los términos independientes b_i $(i = 1, ..., n)$ son todos iguales acero, se dice que el sistema es homogéneo. En caso contrario se dice que es no homogéneo.

Dado el sistema

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Se asocia a éste la matriz A (de orden $m \times n$) de sus coeficientes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

llamada matriz de coeficientes (o matriz del sistema), así como la matriz $m \times (n + 1)$.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

La misma matriz A con una última columna añadida, la de los términos independientes, llamada matriz aumentada de coeficientes (o del sistema).

Ejemplo Asi pues, para el sistema de dos ecuaciones con 4 incognitas

$$\begin{array}{c} 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 = -7 \end{array}$$

Se asocia la matriz del sistema (2×4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

y la matriz aumentada (2×5)

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & -2 & -7 \end{array} \right)$$

Definición 3. *Se dice que la matriz A está en la forma escalonada reducida si en ella se cumplen las siguientes 4 condiciones:*
(1) Si la matriz posee alguna o algunas líneas que consten exclusivamente de ceros, éstas se encuentran concentradas en la parte inferior de la matriz
(2) Para cada línea de la matriz que no consta exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero (leyendo de izquierda a derecha) de tal línea es 1.
(3) Para cada dos líneas consecutivas que no constan exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero de la línea superior se encuentra a la izquierda del primer elemento distinto de cero de la línea a la que precede.
(4) Cada columna que contiene un primer elemento distinto de cero de alguna línea, tiene en las posiciones restantes 0.
Si la matriz A satisface las condiciones $(1),(2),(3)$ pero no la (4), se dice que ésta se encuentra en la forma escalonada

Ejemplo Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

se encuentran en la forma escalonada.

La propiedad que más importante que posee una matriz en la forma escalonada reducida es que si ésta representa la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, las soluciones de éste pueden leerse muy fácilmente.

Ejemplo Suponga que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

representa la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, de modo que atendiendo a la correspondencia entre matrices y sistemas de ecuaciones establecida anteriormente, se ve que el sistema correspondiente es:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 4 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= -2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 &= 4 \end{aligned}$$

o sea, $x_1 = 4,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 4$. Las soluciones están dadas, pues, en la misma matriz.

Método de Eliminación Gaussiana

Dado el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

del cual se quieren conocer sus soluciones, se escribe la matriz aumentada asociada al sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

se debe llevar por medio de operaciones elementales en sus líneas, a la forma escalonada reducida. El sistema que representa esta nueva matriz tiene las mismas soluciones que el sistema original.

Ejemplo Supóngase que se tiene la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Se hace que el primer elemento distinto de cero de la primera línea sea 1. Esto es posible multiplicando por $\dfrac{1}{3}$ tal línea. Sin embargo, se puede intercambiar primeramente la primera y segunda líneas (pues esta línea comienza ya con 1). Se obtiene la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

La siguiente etapa es, por medio de sustituir líneas por ellas mismas más múltiplos de otras, hacer ceros en las posiciones restantes de la columna debajo del 1 logrado esto es:

$$L_2 \to L_2 - 3L_1, \quad L_3 \to L_3 - 2L_1, \quad L_4 \to L_4 - 4L_1$$

Se obtiene la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Se realiza ahora lo siguiente

$$L_3 \to L_3 - 3L_2$$

obteniendose

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Se realiza ahora

$$L_3 \to -\frac{1}{11}L_3$$

para lograr un 1 como primer elemento no nulo de la tercera línea

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Se hace ahora

$$L_4 \to L_4 - 5L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{54}{11} & \frac{54}{11} \end{bmatrix}$$

Para obtener un 1 como primer elemento no nulo de la cuarta línea se realiza

$$L_4 \to \frac{11}{54}L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que esta matriz se encuentra ya en forma escalonada. Para llegar a la forma escalonada reducida, se comienza con el último uno logrado (en el paso anterior) y se procede a volver ceros las posiciones restantes (éncima de él).
Para esto se realiza

$$L_1 \to -L_1 + 3L_4, \quad L_2 \to L_2 - 10L_4, \quad L_3 \to L_3 - \frac{20}{11}L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora con el siguiente uno se hace lo mismo: se realiza

$$L_1 \to L_1 + L_3, \quad L_2 \to L_2 - 5L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente se hace

$$L_1 \to L_1 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y el sistema que representa esta matriz es entonces $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 1$ que es la solución del sistema.

Sistemas Homogéneo de Ecuaciones Lineales

Dado el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

se le asocia la matriz no aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

y se procede a reducirla.

Teorema 1. *Un sistema de ecuaciones lineales con más incognitas que ecuaciones tendrá siempre una infinidad de soluciones.*

Demostración. Supóngase que el sistema tiene m ecuaciones y n incognitas. Las hipótesis del teorema es que $m < n$. La matriz del sistema es una matriz rectangular horizontal. Supóngase que, después de llevar esta matriz a su forma escalonada reducida, se obtuvieron r líneas no nulas. Es claro que $r \leq m$, y por lo tanto $r < n$. Entonces existen $k = n - r$ variables que quedan libres en el sistema, esto es, que éste posee una infinidad de soluciones □

Considérese el sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$AX = B$$

A es entonces una matriz $m \times n$. Se asociará a éste el sistema homogéneo

$$AX = 0$$

y se dira que éste es el sistema homogéneo asociado a

$$AX = B$$

Se dirá que

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widetilde{x_1} \\ \widetilde{x_2} \\ \vdots \\ \widetilde{x_n} \end{bmatrix}$$

es una solución de

$$AX = B$$

si la matriz $A\widetilde{X}$ es idéntica a la matriz B lo cual se escribe

$$A\widetilde{X} = B$$

Teorema 2. *Si el sistema $AX = B$ es consistente, entonces la solución general del sistema puede escribirse como la suma de una solución particular del mismo más la solución general del sistema homogéneo asociado $AX = 0$.*

Demostración. Supóngase que el sistema $AX = B$ es consistente (su conjunto solución no es vacio). Sea $\widetilde{X_p}$ una solución particular del sistema, y sea $\widetilde{X}$ cualquier otra solución del mismo.
Tenemos entonces

$$A(\widetilde{X} - \widetilde{X_p}) = A\widetilde{X} - A\widetilde{X_p} = B - B = 0$$

entonces $\widetilde{X_h} = \widetilde{X} - \widetilde{X_p}$ es alguna solución del sistema homogéneo asociado $AX = 0$.
Es decir, como $\widetilde{X} = \widetilde{X_p} + \widetilde{X_h}$ cualquier solución del sistema $AX = B$ se escribe como la suma de una solución particular $\widetilde{X_p}$ del mismo, más alguna solución del sistema homogéneo asociado.
Sea ahora $\widetilde{X_h}$ cualquier solución de $AX = 0$. Al escribir $\widetilde{X} = \widetilde{X_p} + \widetilde{X_h}$ se ve que $A\widetilde{X} = B$, esto es, es solución de $AX = B$ □

Ejemplo Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 19 \end{aligned}$$

Al usar eliminación Gaussiana, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que la solución general del sistema es:

$$x_1 = 7 - t$$
$$x_2 = -1 + t$$
$$x_3 = t$$

con $t \in \mathbb{R}$.
Usando notación matricial

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-t \\ -1+t \\ t \end{bmatrix}$$

Obsérvese que

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

en donde $x_1 = 7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ es una solución particular del sistema y $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$) es la solución general del sistema homogéneo asociado.