Conjuntos Ortonormales

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial con producto interno $(V, \langle , \rangle)$ y sea S un subconjunto de V. Se dice que S es un conjunto ortogonal de vectores de V si cada par de vectores distintos son ortogonales. En particular, si $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, S será ortogonal si, y solo si*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \|v_i\|^2 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Si además cada vector v del conjunto ortogonal S de V tiene norma 1, al conjunto S se le llama ***conjunto ortonormal***

Ejemplo En el espacio vectorial $C[-1, 1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$ con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx$$

el conjunto infinito de vectores

$$S = \{\cos(2n\pi\ x), n = 0, 1, 2, ...\}$$

es un conjunto ortonormal.

Demostración. Tenemos que cada vector $v_n = \cos(2n\pi\ x)$ en S es unitario pues

$$\|v_n\| = \sqrt{\langle v_n, v_n \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx} = 1$$

Por otra parte, si $n \neq m$

$$\langle v_n, v_m \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(2n\pi\ x)\cos(2m\pi\ x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\cos(2(n+m)\pi\ x) + \cos(2(n-m)\pi\ x))\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(n+m)\pi}\operatorname{sen}(2(n+m)\pi) + \frac{1}{2(n-m)\pi}\operatorname{sen}(2(n-m)\pi)\right]$$

$$= 0$$

es decir los vectores v_n, v_m $(n \neq m)$ son ortogonales □

Bases Ortonormales

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $(V, \langle , \rangle)$, se dice que la base*

$$\beta = \{v_1, ..., v_n\}$$

de V es una base ortonormal si el conjunto β es un conjunto ortonormal de vectores en V

Ejemplo Compruébese que la base

$$\beta = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

de $\mathbb{R}^3$ es una base ortonormal.

Solución En este caso se tiene

$$\langle v_1, v_2\rangle = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\langle v_1, v_3\rangle = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\langle v_2, v_3\rangle = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

Por otro lado

$$\|v_1\|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\|v_2\|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\|v_3\|^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

Ejercicio Escríbase el vector $u = (6, 6, 9)$ como una combinación lineal de los vectores de la base β.

Solución Usando el resultado

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \langle u, v_3\rangle v_3$$

se tiene

$$\begin{aligned} u &= \left((6)\left(\frac{2}{3}\right) + (6)\left(-\frac{2}{3}\right) + (-9)\left(\frac{1}{3}\right)\right) v_1 + \left((6)\left(\frac{2}{3}\right) + (6)\left(\frac{1}{3}\right) + (-9)\left(-\frac{2}{3}\right)\right) v_2 \\ &\quad + \left((6)\left(\frac{1}{3}\right) + (6)\left(\frac{2}{3}\right) + (-9)\left(\frac{2}{3}\right)\right) v_3 \\ &= -3v_1 + 12v_2 \end{aligned}$$

El proceso de Gram-Schmidt Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $(V, \langle , \rangle)$. Sea

$$\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

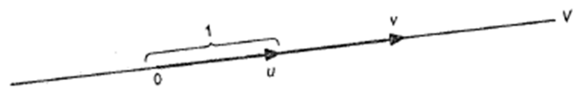
una base de el.

Vamos a demostrar que el espacio V tiene una base ortonormal. Se analizarán los casos $n = 1, 2, 3$.

Caso n=1 En este caso se tiene que $\dim v = 1$ y sea $\beta = \{v_1\}$ una base de V, si consideramos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Se tiene que $L(u_1) = L(v_1) = V$



y $\|u_1\| = 1$, de modo que

$$\beta_N = \{u_1\}$$

es la base ortonormal buscada

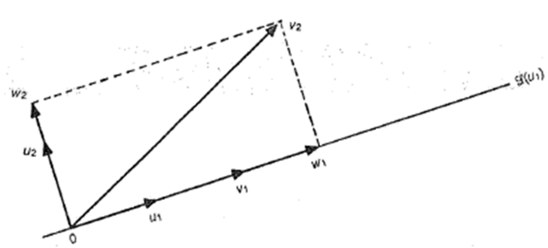
Caso n=2 En este caso se tiene que $\dim v = 2$ y sea $\beta = \{v_1, v_2\}$ una base de V y se quiere construir a partir de ella una base ortonormal

$$\beta_N = \{u_1, u_2\}$$

Para construir u_1, solo se normaliza el vector v_1 y se tiene

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Para el vector u_2 la idea es descomponer el vector v_2 como la suma de dos vectores $w_1 + w_2$



en donde w_1 se encuentra en el espacio generado u_1 y w_2 es el vector que es ortogonal a u_1, es decir

$$\langle w_2, u_1 \rangle = 0$$

(1) $w_1 \in L(u_1) \Rightarrow \exists\, c \ni w_1 = cu_1$
(2) $v_2 = w_1 + w_2 \Rightarrow w_2 = v_2 - w_1$
(3)$\langle w_2, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2 - cu_1, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2, u_1 \rangle - c\langle u_1, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2, u_1 \rangle - c|u_1|^2 = 0$

$$\Rightarrow \langle v_2, u_1 \rangle - c = 0$$

$$\Rightarrow \ c = \langle v_2, u_1 \rangle$$

(4) Se tiene entonces

$$w_2 = v_2 - cu_1 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$

finalmente

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}$$

vamos a comprobar $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$, en este caso

$$\begin{aligned}
\langle u_2, u_1 \rangle &= \left\langle \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}, u_1 \right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\|\|\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|} \right) \langle v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1, u_1 \rangle \\
&= \left(\frac{1}{\|\|\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|} \right) (\langle v_2, u_1 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle) \\
&= \left(\frac{1}{\|\|\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|} \right) (\langle v_2, u_1 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle) \\
&= \left(\frac{1}{\|\|\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|} \right) 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Caso n=3 En este caso se tiene que $\dim v = 3$ y sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y se quiere construir a partir de ella una base ortonormal

$$\beta_N = \{u_1, u_2, u_3\}$$

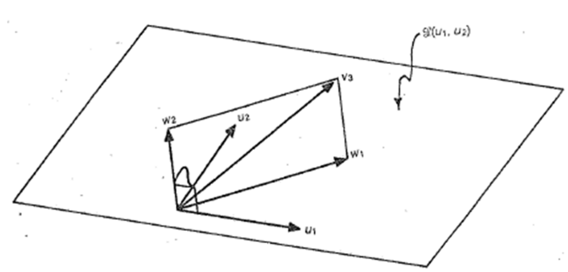
Para construir u_1, solo se normaliza el vector v_1 y se tiene

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Para el vector u_2 usamos lo anterior

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}$$

Para construir u_3 usamos el vector v_3 con las siguientes características
(1) $v_3 = w_1 + w_2$ donde w_1 es un vector que se encuentra en el espacio generado por u_1, u_2 y w_2 es ortogonal a u_1 y u_2



(2) como $w_1 \in L(u_1, u_2)$ entonces existen escalares c, d tal que $w_1 = cu_1 + du_2$
(3) si $v_3 = w_1 + w_2$ entonces $w_2 = v_3 - w_1$
(4) si w_2 es ortogonal a u_1 y u_2 entonces

$$\langle w_2, u_1\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle v_3 - w_1, u_1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\; \langle v_3 - cu_1 - du_2, u_1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\; \langle v_3, u_1\rangle - c\langle u_1, u_1\rangle - d\langle u_2, u_1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\; \langle v_3, u_1\rangle - c = 0$$

$$\Rightarrow\; c = \langle v_3, u_1\rangle$$

(5) si w_2 es ortogonal a u_1 y u_2 entonces

$$\langle w_2, u_2\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle v_3 - w_1, u_2\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\; \langle v_3 - cu_1 - du_2, u_2\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\; \langle v_3, u_2\rangle - c\langle u_1, u_2\rangle - d\langle u_2, u_2\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\; \langle v_3, u_2\rangle - d = 0$$

$$\Rightarrow\; d = \langle v_3, u_2\rangle$$

Tenemos entonces que

$$w_2 = v_3 - w_1 = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2$$

finalmente

$$u_3 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}$$

se tiene entonces que $\beta_N = \{u_1, u_2, u_3\}$ es la base buscada.
Vamos a comprobar
$\langle u_3, u_1\rangle = 0$ en este caso

$$\langle u_3, u_1\rangle = \left\langle \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}, u_1 \right\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|} \right) \langle v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2, u_1\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|} \right) (\langle v_3, u_1\rangle - \langle v_3, u_1\rangle\langle u_1, u_1\rangle - \langle v_3, u_2\rangle\langle u_2, u_1\rangle)$$

$$= 0$$

Vamos a comprobar
$\langle u_3, u_2\rangle = 0$ en este caso

$$\langle u_3, u_2\rangle = \left\langle \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}, u_2 \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}\right)\langle v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2, u_2\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}\right)(\langle v_3, u_2\rangle - \langle v_3, u_1\rangle\langle u_1, u_2\rangle - \langle v_3, u_2\rangle\langle u_2, u_2\rangle) \\
&= \left(\frac{1}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}\right)(\langle v_3, u_2\rangle - \langle v_3, u_2\rangle) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Caso n=4 Continuando el proceso anterior a partir de la base $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ se tiene la base ortonormal $\beta_N = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ donde

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}, \quad u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|},$$

$$u_4 = \frac{v_4 - \langle v_4, u_1\rangle u_1 - \langle v_4, u_2\rangle u_2 - \langle v_4, u_3\rangle u_3}{\|v_4 - \langle v_4, u_1\rangle u_1 - \langle v_4, u_2\rangle u_2 - \langle v_4, u_3\rangle u_3\|}$$

Caso n=k El proceso se generaliza a $n = k$ y se tiene a partir de la base $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4, ..., v_k\}$ se tiene la base ortonormal $\beta_N = \{u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_k\}$ donde

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}, \quad u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|},$$

$$u_4 = \frac{v_4 - \langle v_4, u_1\rangle u_1 - \langle v_4, u_2\rangle u_2 - \langle v_4, u_3\rangle u_3}{\|v_4 - \langle v_4, u_1\rangle u_1 - \langle v_4, u_2\rangle u_2 - \langle v_4, u_3\rangle u_3\|}$$

asi hasta el vector u_k donde

$$u_k = \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle v_k, u_i\rangle u_i}{\|v_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle v_k, u_i\rangle u_i\|}$$

Caso n=k+1 a partir de la base $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4, ..., v_k, v_{k+1}\}$, Por lo anterior el subespacio W generado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4, ..., v_k\}$ tiene como base ortonormal los vectores $u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_k$. Sea

$$u_{k+1} = \frac{v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\langle v_{k+1}, u_i\rangle u_i}{\|v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\langle v_{k+1}, u_i\rangle u_i\|}$$

Se tiene que $u_{k+1} \neq 0$ pues de lo contrario se tendría

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k}\langle v_{k+1}, u_i\rangle u_i$$

lo que implicaría que $v_{k+1} \in L(u_1, u_2, ..., u_k) = L(v_1, v_2, ..., v_k)$ lo que contradice el hecho de que $v_1, v_2, ..., v_{k+1}$ es un conjunto linealmente independiente.
Vamos a comprobar que

$$\langle u_{k+1}, u_j\rangle = 0$$

en este caso

$$
\begin{aligned}
\langle u_{k+1}, u_j \rangle &= \left\langle \frac{v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i}{\| v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i \|}, u_j \right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\| v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i \|} \right) \left\langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\| v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i \|} \right) \left(\langle v_{k+1}, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle \right) \\
&= \left(\frac{1}{\| v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i \|} \right) \left(\langle v_{k+1}, u_j \rangle - \langle v_{k+1}, u_j \rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

y también se cumple $\|u_{k+1}\| = 1$. Como los vectores $u_1, u_2, ..., u_{k+1}$ forman un conjunto ortonormal de $k+1$ vectores en el espacio V de dimensión dim $V = k+1$, éstos deben ser la base ortonormal buscada de V.