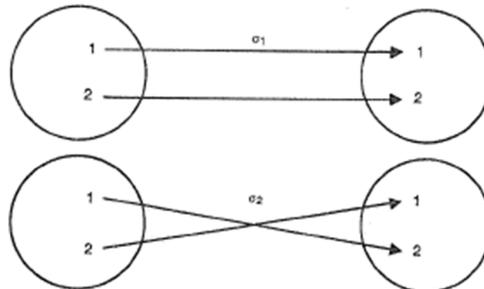


Permutaciones

Considérese el conjunto de números $\{1, 2, \dots, n\}$. Una permutación de este conjunto no es más que una determinada ordenación de sus elementos.

Definición 1. Se llama *permutación del conjunto* $S = \{1, 2, \dots, n\}$ a una función biyectiva $\sigma : S \rightarrow S$.

Ejemplo Si $S = \{1, 2\}$ existen dos funciones biyectivas σ_1 y σ_2 de S en si mismo



Ejemplo Para el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ se tienen las siguientes permutaciones

- (1, 2, 3)
- (1, 3, 2)
- (2, 1, 3)
- (2, 3, 1)
- (3, 1, 2)
- (3, 2, 1)

Ejemplo Para el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$ se puede escribir

$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	$\sigma(4)$
1	2	3	4
		4	3
	3	2	4
		4	2
	4	2	3
		3	2
2	1	3	4
		4	3
	3	1	4
		4	1
	4	1	3
		3	1
3	1	2	4
		4	2
	2	1	4
		4	1
	4	1	2
		2	1
4	1	2	3
		3	2
	2	1	3
		3	1
	3	1	2
		2	1

Se tienen, entonces, las 24 permutaciones de $S = \{1, 2, 3, 4\}$ siguientes

$$\begin{array}{cccc}
 (1, 2, 3, 4) & (2, 1, 3, 4) & (3, 1, 2, 4) & (4, 1, 2, 3) \\
 (1, 2, 4, 3) & (2, 1, 4, 3) & (3, 1, 4, 2) & (4, 1, 3, 2) \\
 (1, 3, 2, 4) & (2, 3, 1, 4) & (3, 2, 1, 4) & (4, 2, 1, 3) \\
 (1, 3, 4, 2) & (2, 3, 4, 1) & (3, 2, 4, 1) & (4, 2, 3, 1) \\
 (1, 4, 2, 3) & (2, 4, 1, 3) & (3, 4, 1, 2) & (4, 3, 1, 2) \\
 (1, 4, 3, 2) & (2, 4, 3, 1) & (3, 4, 2, 1) & (4, 3, 2, 1)
 \end{array}$$

En general para el conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que

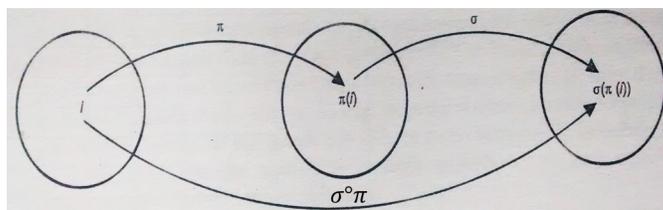
$$\begin{array}{l}
 \sigma(1) \text{ tiene } n \text{ posibilidades} \\
 \sigma(2) \text{ tiene } n - 1 \text{ posibilidades} \\
 \sigma(3) \text{ tiene } n - 2 \text{ posibilidades} \\
 \vdots
 \end{array}$$

Se pueden construir $n(n - 1)(n - 2) \cdots (2)(1) = n!$ diferentes de permutaciones de este conjunto.

Ahora bien como funciones que son las permutaciones, se pueden componer: Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\sigma, \pi : S \rightarrow S$ dos permutaciones cualesquiera. La composición $\sigma \circ \pi : S \rightarrow S$ es también una permutación definida por

$$(\sigma \circ \pi)(i) = \sigma(\pi(i)), \quad i = 1, \dots, n$$

esquemáticamente



o bien

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(i) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(i) & \cdots & \pi(n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\sigma \circ \pi)(1) & (\sigma \circ \pi)(2) & \cdots & (\sigma \circ \pi)(i) & \cdots & (\sigma \circ \pi)(n) \end{pmatrix}$$

Ejemplo Por ejemplo

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

También dado que una permutación σ es una función biyectiva, se puede hablar de su inversa σ^{-1} , definida como la permutación σ^{-1} tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id$$

donde id denota la permutación identidad $(1, 2, \dots, n)$.

Ejemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Definición 2. Sea σ una permutación del conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Se dice que posee una inversión relativa al par de números $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, si ocurre $i < j$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Ejemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene una inversión, pues $1 < 2$ y $\sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(2)$.

Ejemplo La permutación

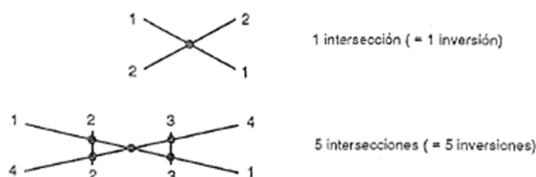
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene 5 inversiones

- $1 < 2$ y $\sigma(1) = 4 > 2 = \sigma(2)$
- $1 < 3$ y $\sigma(1) = 4 > 3 = \sigma(3)$
- $1 < 4$ y $\sigma(1) = 4 > 1 = \sigma(4)$
- $2 < 4$ y $\sigma(2) = 2 > 1 = \sigma(4)$
- $3 < 4$ y $\sigma(3) = 3 > 1 = \sigma(4)$

Una manera sencilla de contar las inversiones de una permutación está dada por la siguiente regla: escriba en una línea los elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y debajo de ella los valores de la permutación $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$. Una con trazos los elementos correspondientes y cuente el número de intersecciones que ocurrieron en los trazos realizados.

Para los ejemplos anteriores se tiene



Definición 3. Sea σ una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Sea $k_\sigma =$ número de inversiones de σ . Si k_σ es par, se dice que la permutación σ es par, caso contrario, se dice que es una permutación impar.

Definición 4. Se define el signo de la permutación σ , denotado por $sgn \sigma$ como

$$sgn \sigma = (-1)^{k_\sigma}$$

Por lo tanto si σ es una permutación par, $sgn \sigma = 1$, caso contrario, si σ es una permutación impar, $sgn \sigma = -1$

Ejemplo Considere, por ejemplo, las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$.

<i>PERMUTACION</i>	<i>INVERSIONES</i>	<i>TIPO</i>	<i>SIGNO</i>
$(1, 2, 3)$	0	<i>par</i>	1
$(2, 3, 1)$	2	<i>par</i>	1
$(3, 1, 2)$	2	<i>par</i>	1
$(1, 3, 2)$	1	<i>impar</i>	-1
$(2, 1, 3)$	1	<i>impar</i>	-1
$(3, 2, 1)$	3	<i>impar</i>	-1

Queremos ver ahora que ocurre con el signo de una composición de permutaciones y como esta relacionado el signo de la composición con el signo de cada permutación componente

Ejemplo Sean σ, π las permutaciones

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene:

número de inversiones en $\sigma = 3$. Entonces $\text{sgn } \sigma = -1$
 número de inversiones en $\pi = 2$. Entonces $\text{sgn } \pi = 1$

Para las composiciones se tiene

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene:

número de inversiones en $\pi \circ \sigma = 1$. Entonces $\text{sgn } \pi \circ \sigma = -1$
 número de inversiones en $\sigma \circ \pi = 5$. Entonces $\text{sgn } \sigma \circ \pi = -1$

Observe que tanto $\text{sgn } \pi \circ \sigma$ y $\text{sgn } \sigma \circ \pi$ como el producto $(\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \pi)$ valen -1 .

Teorema 1. Sean σ, π dos permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Entonces

$$\text{sgn } \pi \circ \sigma = (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \pi) = \text{sgn } \sigma \circ \pi$$

Demostración. Vamos a considerar los siguientes casos

CASO	ORDEN RELATIVO	CONCLUSIÓN
1	$i < j$	No hay inversión para π
	$\pi(i) < \pi(j)$	No hay inversión para σ
	$\sigma(\pi(i)) < \sigma(\pi(j))$	No hay inversión para $\sigma \circ \pi$
2	$i < j$	No hay inversión para π
	$\pi(i) < \pi(j)$	Hay inversión para σ
	$\sigma(\pi(i)) > \sigma(\pi(j))$	Hay inversión para $\sigma \circ \pi$
3	$i < j$	Hay inversión para π
	$\pi(i) > \pi(j)$	Hay inversión para σ
	$\sigma(\pi(i)) < \sigma(\pi(j))$	No hay inversión para $\sigma \circ \pi$
4	$i < j$	Hay inversión para π
	$\pi(i) > \pi(j)$	No hay inversión para σ
	$\sigma(\pi(i)) > \sigma(\pi(j))$	Hay inversión para $\sigma \circ \pi$

Llamemos $k_{\sigma \circ \pi}$, k_σ y k_π a los correspondientes números de inversiones en $\sigma \circ \pi$, σ y π .

Obsérvese que cuando hay una inversión en $\sigma \circ \pi$, entonces hay una inversión en σ o en π (casos 2 y 4 respectivamente). Por lo tanto

$$k_{\sigma \circ \pi} = k_\sigma + k_\pi - 2r$$

donde r es el número de veces en los que hay inversiones en σ y en π simultáneamente (caso 3). Entonces

$$\begin{aligned} \text{sgn } \sigma \circ \pi &= (-1)^{k_{\sigma \circ \pi}} \\ &= (-1)^{k_\sigma + k_\pi - 2r} \\ &= (-1)^{k_\sigma} (-1)^{k_\pi} (-1)^{-2r} \\ &= (-1)^{k_\sigma} (-1)^{k_\pi} \\ &= (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \pi) \end{aligned}$$

□

Corolario 1. Sea σ una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Entonces

$$\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}$$

Demostración. Como $\sigma \circ \sigma^{-1} = Id$ se tiene

$$\text{sgn } \sigma \circ \sigma^{-1} = (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \sigma^{-1}) = 1$$

pues ($\text{sgn } Id = (-1)^0 = 1$). Entonces

$$\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}$$

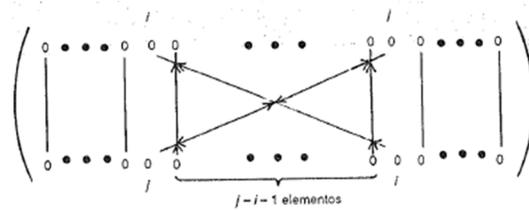
□

Definición 5. Se dice que la permutación σ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ es una transposición de los enteros $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ si $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ y $\sigma(k) = k$ para $k \neq i, j$

Una transposición se ve

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

Se pueden contar el número de inversiones que tiene una transposición i, j . Hágase con la regla de contar intersecciones



se observa, entonces, que existirían $2(j - i - 1) + 1$ intersecciones entre los trazos.

Ejemplo La trasposición de los enteros 3 y 9 del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

se observa que existirían $2(9 - 3 - 1) = 11$ inversiones.