Productos Escalares y Hermitianos

Definición 1. *Sea E un espacio vectorial, un* ***producto escalar*** *en E es una función de*

$$\langle , \rangle : E \times E \to F$$

donde $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ que a cada par de vectores $x, y \in E$ le asocia un número

$$\langle x, y \rangle$$

que satisface las siguientes propiedades:
1)$\langle x, x\rangle > 0$ *si* $x \neq 0$
2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *La barra indica conjugación compleja*
3)$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
4) $\langle x + y, z\rangle = \langle x + y\rangle + \langle y, z\rangle$

Ejemplor La función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con valores

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

es un producto escalar

Demostración. Tenemos que

$$a) \quad \langle x, x\rangle = x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0 \quad si \quad x \neq 0$$

$$b) \quad \langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = y \cdot x = \langle y, x\rangle$$

$$c) \quad \lambda\langle x, y\rangle = \lambda(x \cdot y) = \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = (\lambda x_1y_1 + \lambda x_2y_2 + \cdots + \lambda x_ny_n) =$$

$$([\lambda x_1]y_1 + [\lambda x_2]y_2 + \cdots + [\lambda x_n]y_n) = (\lambda x \cdot y) = \langle \lambda x, y\rangle$$

$$d) \quad \langle x+y, z\rangle = (x+y)\cdot z = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)\cdot(z_1, z_2, \cdots z_n) = ((x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2+\cdots$$

$$+(x_n+y_n)z_n) = x_1z_1+y_1z_1+x_2z_2+y_2z_2+\cdots+x_nz_n+y_nz_n = x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n+y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_nz_n =$$

$$(x \cdot z) + (y \cdot z) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

□

Ejemplo El producto escalar usual en $\mathbb{C}^n$ está dado por

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

comprobar que es en efecto un producto escalar

Demostración. Vamos a comprobar que se cumple $\langle x, x\rangle > 0$, en este caso

$$\langle u, u\rangle = u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n}$$

$$= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$$

Vamos a ver que se cumple $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, en este caso

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

$$= \overline{v_1\overline{u_1}} + \overline{v_2\overline{u_2}} + \cdots + \overline{v_n\overline{u_n}}$$

$$= \overline{v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2} + \cdots + v_n\overline{u_n}}$$

$$= \overline{\langle v, u\rangle}$$

Vamos a ver que se cumple $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$, en este caso

$$\langle u, \lambda v\rangle = u_1\overline{\lambda v_1} + u_2\overline{\lambda v_2} + \cdots + u_n\overline{\lambda v_n}$$

$$= u_1\overline{\lambda}\overline{v_1} + u_2\overline{\lambda}\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{\lambda}\overline{v_n}$$

$$= \overline{\lambda}(u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n})$$

$$= \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$$

Vamos a ver que se cumple $\langle x + y, z\rangle = \langle x + y\rangle + \langle y, z\rangle$, en este caso

$$\langle u + v, w\rangle = (u_1 + v_1)\overline{w_1} + (u_2 + v_2)\overline{w_2} + \cdots + (u_n + v_n)\overline{w_n}$$

$$= u_1\overline{w_1} + v_1\overline{w_1} + u_2\overline{w_2} + v_2\overline{w_2} + \cdots + u_n\overline{w_n} + v_n\overline{w_n}$$

$$= u_1\overline{w_1} + u_2\overline{w_2} + \cdots + u_n\overline{w_n} + v_1\overline{w_1} + v_2\overline{w_2} + \cdots + v_n\overline{w_n}$$

$$= \langle u + w\rangle + \langle v, w\rangle$$

□

La norma inducida por un producto escalar

Si V es un espacio con producto escalar $\langle , \rangle$. Definimos su ***norma***, como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

En general, una ***norma*** en un espacio vectorial E es una aplicación $x \to \|x\|$ de E en $(0, +\infty)$ que satisface las siguientes propiedades:
1)$\|v\| > 0$
2) $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$
3) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle v, v\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda|\|v\| \quad \forall\lambda \in E.$

Desigualdad de Cauchy Schawarz En un espacio vectorial V se cumple

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\ \|w\|$$

Demostración. Consideremos el producto escalar $\langle u-\lambda v, u-\lambda v\rangle$ para obtener

$$0 \leq \langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle = \langle v, v-\lambda w\rangle + \langle -\lambda w, v-\lambda w\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle v, v\rangle + \langle v, -\lambda w\rangle + \langle -\lambda w, v\rangle + \langle -\lambda w, -\lambda w\rangle \\
&= \|v\|^2 - \overline{\lambda}\langle v, w\rangle - \lambda\langle w, v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\|w\|^2 \\
&= \|v\|^2 - \overline{\lambda}\langle v, w\rangle - \lambda\overline{\langle v, w\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\|w\|^2
\end{aligned}$$

Hacemos

$$\lambda = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$$

y se obtiene

$$0 \leq \|v\|^2 - \overline{\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\right)}\langle v, w\rangle - \left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\right)\overline{\langle v, w\rangle} + \left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\right)\overline{\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\right)}\|w\|^2$$

Multiplicando por $\|w\|^2$ tenemos

$$0 \leq \|v\|^2\|w\|^2 - \overline{\langle v, w\rangle}\langle v, w\rangle - \langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle} + \langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 0 \leq \|v\|^2\|w\|^2 - \overline{\langle v, w\rangle}\langle v, w\rangle \\
&\Rightarrow\ \overline{\langle v, w\rangle}\langle v, w\rangle \leq \|v\|^2\|w\|^2 \\
&\Rightarrow\ |\langle v, w\rangle|^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2
\end{aligned}$$

por lo que

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\ \|w\|$$

□