Propiedades del Determinante

1. Sea A una matriz de orden n. Entonces

$$\det\ A = \det\ A^t$$

Demostración. Sea $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ la matriz transpuesta de $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Es decir $b_{ij} = a_{ji},\quad i,j = 1,...,n$. Entonces

$$\det\ A^t = \det\ B = \sum_{\pi}(sgn\ \pi) b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \cdots b_{n\pi(n)}$$

Sea $j = \pi(i)$. Entonces $\pi^{-1}(j) = i$ y se puede escribir

$$b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \cdots b_{n\pi(n)} = b_{\pi^{-1}(1)(1)} b_{\pi^{-1}(2)(2)} \cdots b_{\pi^{-1}(n)(n)}$$

sabemos también que

$$sgn\ \pi = sgn\ \pi^{-1}$$

por lo tanto

$$\det\ B = \sum_{\pi}(sgn\ \pi) b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \cdots b_{n\pi(n)} = \det\ B = \sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1}) b_{\pi^{-1}(1)(1)} b_{\pi^{-1}(2)(2)} \cdots b_{\pi^{-1}(n)(n)}$$

al ser $b_{ij} = a_{ji},\quad i,j = 1,...,n$ se tiene

$$\sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1}) b_{\pi^{-1}(1)(1)} b_{\pi^{-1}(2)(2)} \cdots b_{\pi^{-1}(n)(n)} = \sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1}) a_{(1)\pi^{-1}(1)} a_{(2)\pi^{-1}(2)} \cdots a_{(n)\pi^{-1}(n)}$$

Ahora bien, cada permutación σ del conjunto $\{1,2,...,n\}$ es la inversa de alguna permutación de este conjunto, tomamos entonces $\sigma = \pi^{-1}$ tenemos entonces

$$\begin{aligned}\sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1}) a_{(1)\pi^{-1}(1)} a_{(2)\pi^{-1}(2)} \cdots a_{(n)\pi^{-1}(n)} &= \sum_{\pi^{-1}}(sgn\ \pi^{-1}) a_{(1)\sigma(1)} a_{(2)\sigma(2)} \cdots a_{(n)\sigma(n)} \\ &= \det\ A\end{aligned}$$

□

2. Se dice que la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ es una matriz triangular superior (triangular inferior) si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ($a_{ij} = 0$ para $i < j$ respectivamente). Se cumple entonces

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Demostración. Sea σ una permutación del conjunto $\{1,2,...,n\}$ Si para algún $j \in \{1,2,...,n\}$ ocurre $\sigma(j) \neq j$, entonces debe existir $i \in \{1,2,...,n\}$ tal que $i > \sigma(i)$. En tal caso $a_{i\sigma(i)} = 0$. Siendo el único producto que no es cero donde $\sigma(i) = i$ para toda i. Se trata, de la permutación identidad para la cual $sgn\ \sigma = 1$. Entonces

$$\det\ A = \sum_{\sigma}(sgn\ \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

y como la transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior según el resultado anterior, tambien ocurre

$$\det\ A^t = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

□

3. Sean $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Supóngase que para alguna $r \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene $c_{rj} = a_{rj} + b_{rj}$, mientras que si $i \neq r$, $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$. Entonces

$$\det\ C = \det\ A + \det\ B$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\det\ C &= \sum_\sigma (sgn\ \sigma) c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots c_{r\sigma(r)}\cdots c_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_\sigma (sgn\ \sigma) c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots (a_{r\sigma(r)} + b_{r\sigma(r)})\cdots c_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_\sigma (sgn\ \sigma) c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots a_{r\sigma(r)}\cdots c_{n\sigma(n)} + \sum_\sigma (sgn\ \sigma) c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots b_{r\sigma(r)}\cdots c_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_\sigma (sgn\ \sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{r\sigma(r)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_\sigma (sgn\ \sigma) b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{r\sigma(r)}\cdots b_{n\sigma(n)} \\
&\det\ A + \det\ B
\end{aligned}$$

□

4. Si A' es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos de sus líneas entonces

$$\det\ A' = -\det\ A$$

Demostración. Sea $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Supóngase que A' se obtuvo de A intercambiando en ésta las líneas p y q. Entonces si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ se tiene

$$\begin{aligned}
a'_{ij} &= a_{ij} \quad si \quad i \neq p, q \\
a'_{pj} &= a_{qj} \\
a'_{qj} &= a_{pj}
\end{aligned}$$

Se tiene por lo tanto

$$\begin{aligned}
\det\ A' &= \sum_\sigma (sgn\ \sigma) a'_{1\sigma(1)}a'_{2\sigma(2)}\cdots a'_{p\sigma(p)}\cdots a'_{q\sigma(q)}\cdots a'_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_\sigma (sgn\ \sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{q\sigma(p)}\cdots a_{p\sigma(q)}\cdots a_{n\sigma(n)}
\end{aligned}$$

La permutación sigma se comporta

$$\det\ A' = \sum_\sigma sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(p) & \cdots & \sigma(q) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{q\sigma(p)}\cdots a_{p\sigma(q)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

donde

$$\det\ A' = \sum_{\sigma} sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \boxed{p} & \cdots & \boxed{q} & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \boxed{\sigma(p)} & \cdots & \boxed{\sigma(q)} & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{q\sigma(p)} \cdots a_{p\sigma(q)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

y debería comportarse

$$\det\ A = \sum_{\pi} sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(p) & \cdots & \pi(q) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} a_{1\pi(1)} \cdots a_{q\pi(q)} \cdots a_{p\pi(p)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$\det\ A = \sum_{\pi} sgn \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \boxed{p} & \cdots & \boxed{q} & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \boxed{\pi(p)} & \cdots & \boxed{\pi(q)} & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} a_{1\pi(1)} \cdots a_{q\pi(q)} \cdots a_{p\pi(p)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Definimos la transposición

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ 1 & \cdots & q & \cdots & p & \cdots & n \end{pmatrix}$$

entonces $\pi = \sigma \circ \tau$ es la permutación

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(q) & \cdots & \pi(p) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Además, $sgn\ \pi = sgn(\sigma \circ \tau) = -sgn\ \sigma$. Entonces

$$\begin{aligned} \det\ A &= \sum_{\pi} (sgn\ \pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{q\pi(q)} \cdots a_{p\pi(p)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= -\sum_{\sigma} (sgn\ \pi) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{q\sigma(p)} \cdots a_{p\sigma(q)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ & -\det\ A' \end{aligned}$$

$\square$

5. Si A es una matriz de orden n, que posee dos líneas iguales, entonces

$$\det\ A = 0$$

Demostración. Supóngase que A es una matriz de orden n que tiene las líneas p y q iguales. Sea A' la matriz que se obtiene de A intercambiando las líneas p y q.
Se debe cumplir $A = A'$. Pero según el resultado anterior

$$\det\ A' = -\det\ A$$

por lo tanto
$$\det\ A = 0$$

$\square$

6. Sea A' la matriz que se ha obtenido de A multiplicando una de sus líneas por la constante c. Entonces
$$\det\ A' = c\ \det\ A$$

Demostración. Sea $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Supongamos que la línea r de A fue multiplicada por c para obtener A'. Entonces
$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} \quad si \quad i \neq r \\ a'_{ij} &= ca_{rj} \quad si \quad i = r \end{aligned}$$
Se tiene entonces
$$\begin{aligned} \det\ A' &= \sum_{\pi} (sgn\ \pi) a'_{1\pi(1)} \cdots a'_{r\pi(r)} \cdots a'_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi} (sgn\ \pi) a_{1\pi(1)} \cdots ca_{r\pi(r)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= c \sum_{\pi} (sgn\ \pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{r\pi(r)} \cdots a_{n\pi(n)} \end{aligned}$$
$$c \det\ A$$

$\square$

7. Sea A' la matriz que se obtiene de A sustituyendo su r-ésima línea por ella mas k veces su s-ésima línea. Entonces
$$\det\ A' = \det\ A$$

Demostración. Sea $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ la matriz tal que
$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ij} \quad si \quad i \neq r \\ b_{rj} &= ka_{sj} \quad si \quad i = r \end{aligned}$$
Sea $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ la matriz tal que
$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} = b_{ij} && si \quad i \neq r \\ a'_{rj} &= a_{rj} + ka_{sj} = a_{rj} + b_{rj} && si \quad i = r \end{aligned}$$
según resultados anteriores
$$\det\ A' = \det\ A + \det\ B$$
por otro lado
$$\det\ B = k \det\ \widetilde{A}$$
donde $\widetilde{A}$ es la matriz que tiene sus líneas r y s iguales, y por tanto, $\det\ \widetilde{A} = 0$ es decir $\det\ B = 0$. Por tanto
$$\det\ A' = \det\ A$$

$\square$

En resumen se tiene

OPERACIÓN	EFECTO EN det A
Intercambio de líneas en A	det $A' = -$ det A
Multiplicar una línea por una constante c	det $A' = c$ det A
Sustituir una línea por ella misma más un multiplo de otra	det $A' =$ det A

También se ha probado que el determinante de una matriz cuadrada A es igual al determinante de su matriz transpuesta A'. Por lo que toda propiedad de los determinantes relacionada con las líneas de una matriz sigue siendo válida si en lugar de las líneas de la matriz se consideran sus columnas (pues las columnas de la matriz son las líneas de la matriz transpuesta, y el determinante no se ve afectado por este cambio).
En resumen se tiene

OPERACIÓN	EFECTO EN det A
Intercambio de columnas en A	det $A' = -$ det A
Multiplicar una columna por una constante c	det $A' = c$ det A
Sustituir una columna por ella misma más un multiplo de otra	det $A' =$ det A

8. Si la matriz cuadrada A tiene una línea (o columna) de ceros, entonces

$$\det A = 0$$

Demostración. Si r es la línea de A que consta de solo ceros, esto es, $a_{rj} = 0, \; j = 1, ..., n$ se tiene que en todos los productos que aparecen en la definición del determinante de la matriz A, éstos tienen siempre como factor un elemento de ésta línea. Por lo tanto todos son cero, y entonces,

$$\det A = 0$$

□

9. Si A es una matriz no inversible, entonces

$$\det A = 0$$

Demostración. Si A es no inversible, entonces su forma escalonada reducida tendrá una línea de ceros y según lo anterior

$$\det A = 0$$

□