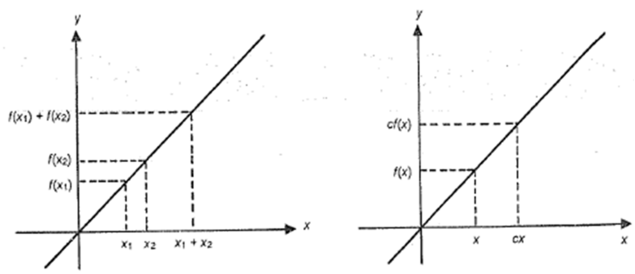
El espacio de las Transformaciones Lineales

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideramos las del tipo $f(x) = mx$ y tenemos que

$$f(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) = mx_1 + mx_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(cx) = m(cx) = c(mx) = cf(x)$$

Es decir la función f transforma sumas en sumas y productos por escalares, geométricamente esto se ve como



Una generalización algebraica de este tipo de funciones; son la que tienen dominio y codominio espacios vectoriales. A este tipo de funciones se les llama transformaciones lineales

Definición 1. *Sean U, V dos espacios vectoriales. Se dice que la función $T : V \to U$ es una transformación lineal si*
(1) T preserva sumas

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \quad \forall\ v_1, v_2 \in V$$

(2) T preserva productos por escalares

$$T(cv) = cT(v), \quad \forall\ v \in V,\ \forall\ c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo Una reflexión por el eje x se puede definir $R_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$R_x(x, y) = (x, -y)$$

Vamos a comprobar si es una transformación lineal, en este caso, sean $v_1 = (x, y)$, $v_2 = (x', y')$ tenemos entonces que

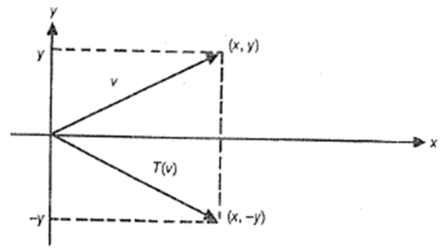
$$R_x(v_1 + v_2) = R_x((x, y) + (x', y')) = R_x(x + x', y + y')$$

$$= (x + x', -(y + y')) = (x + x', -y - y') = (x, -y) + (x', -y') = R_x(v_1) + R_x(v_2)$$

Por otro lado

$$R_x(cv_1) = R_x(c(x, y)) = R_x(cx, cy) = (cx, -cy) = (cx, c(-y)) = c(x, -y) = cT(x, y) = cR_x(v_1)$$

por lo tanto R_x es una transformación lineal. Geométricamente se ve



Ejemplo Una homotecia de razón k en el plano cartesino es una transformación $H_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$H_k(x, y) = (kx, ky)$$

Vamos a comprobar si es una transformación lineal, en este caso, sean $v_1 = (x, y)$, $v_2 = (x', y')$ tenemos entonces que

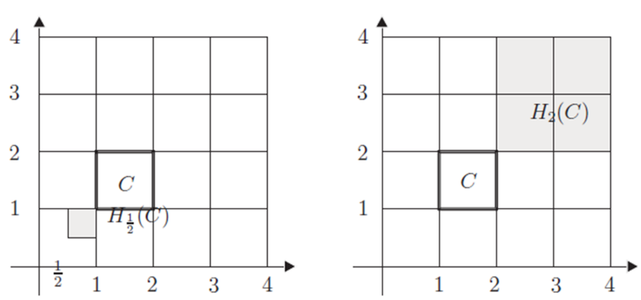
$$H_k(v_1 + v_2) = H_k((x, y) + (x', y')) = H_k(x + x', y + y')$$

$$= (k(x + x'), k(y + y')) = (kx + kx', ky + ky') = (kx, ky) + (kx', ky') = H_k(v_1) + H_k(v_2)$$

Por otro lado

$$H_k(cv_1) = H_k(c(x, y)) = H_k(cx, cy) = (kcx, kcy) = (ckx, cky) = c(kx, ky) = cH_k(x, y) = cH_k(v_1)$$

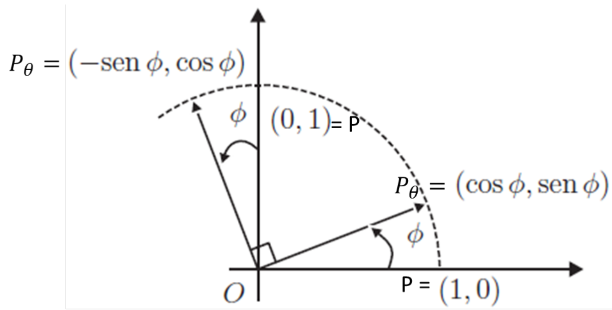
por lo tanto H_k es una transformación lineal. Geométricamente se ve



Homotecias de razones $k = \dfrac{1}{2}$ y $k = 2$

Ejemplo Una rotación del plano cartesino con centro en el origen por un ángulo θ, lleva el vector de posición del punto P al vector de posición P_θ tal que el ángulo entre ambos vectores es precisamente θ

Geométricamente tenemos que si $P = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ entonces $P_\theta = x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, es decir, el rotado del vector P que es una cierta combinación lineal de los vectores base, es el vector obtenido formando la misma combinación lineal de los rotados de los vectores básicos.



Tenemos entonces que $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que

$$R_\theta(x, y) = x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

Vamos a comprobar si R_θ es una transformación lineal, en este caso, sean $v_1 = (x, y)$, $v_2 = (x', y')$ tenemos entonces que

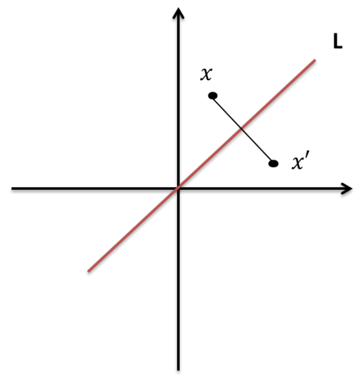
$$\begin{aligned}
R_\theta(v_1 + v_2) &= R_\theta((x, y) + (x', y')) = R_\theta(x + x', y + y') \\
&= (x + x')(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + (y + y')(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\
&= ((x + x')\cos\theta, (x + x')\operatorname{sen}\theta) + (-(y + y')\operatorname{sen}\theta, (y + y')\cos\theta) \\
&= (x\cos\theta + x'\cos\theta, x\operatorname{sen}\theta + x'\operatorname{sen}\theta) + (-y\operatorname{sen}\theta - y'\operatorname{sen}\theta, y\cos\theta + y'\cos\theta) \\
&= (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta + x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta + x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) \\
&= (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) + (x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta, x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) \\
&= (x\cos\theta, x\operatorname{sen}\theta) + (-y\operatorname{sen}\theta, y\cos\theta) + (x'\cos\theta, x'\operatorname{sen}\theta) + (-y'\operatorname{sen}\theta, y'\cos\theta) \\
&= x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) + x'(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y'(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\
&= R_\theta(x, y) + R_\theta(x', y') \\
&= R_\theta(v_1) + R_\theta(x, y)(v_2)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
R_\theta(cv_1) &= R_\theta(c(x, y)) = R_\theta(cx, cy) \\
&= cx(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + cy(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\
&= c(x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)) \\
&= cR_\theta(x, y) \\
&= cR_\theta(v_1)
\end{aligned}$$

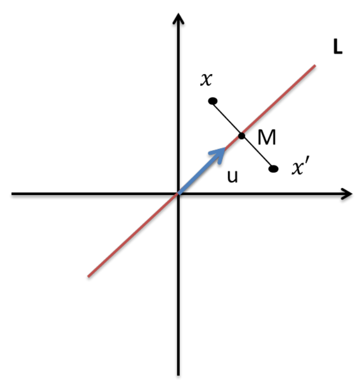
y por tanto las rotaciones del plano con centro en el origen son transformaciones lineales

Ejemplo Reflexión: Dado un punto x se tiene que x' es una reflexión de x con respecto a una recta L si:
(1) $\overline{xx'} \perp L$



(2) La intersección M de $\overline{xx'}$ con L es punto punto medio de $\overline{xx'}$, es decir

$$M = \frac{1}{2}(x + x')$$



de donde

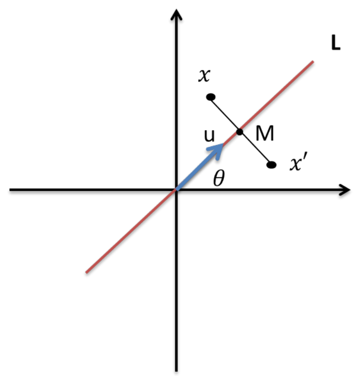
$$x' = 2M - x$$

Por otro lado si u es un vector unitario en la dirección de la recta L, entonces la proyección de x sobre el vector u es

$$P_u(x) = \frac{x \cdot u}{\|u\|^2} u$$

Si u es un vector unitario que forma un ángulo θ con el eje X entonces

$$u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$



y por tanto

$$\begin{aligned} P_u(x,y) &= \frac{(x,y)\cdot(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)}{\|(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\|^2}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) \\ &= (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) \\ &= (x\cos^2\theta + y\operatorname{sen}\theta\cos\theta, x\cos\theta\operatorname{sen}\theta + y\operatorname{sen}^2\theta) \end{aligned}$$

sustituyendo en

$$x' = 2M - x$$

se tiene

$$\begin{aligned} (x',y') &= (2x\cos^2\theta + 2y\operatorname{sen}\theta\cos\theta, 2x\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2y\operatorname{sen}^2\theta) - (x,y) \\ &= (2x\cos^2\theta + 2y\operatorname{sen}\theta\cos\theta - x, 2x\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2y\operatorname{sen}^2\theta - y) \\ &= (x(2\cos^2\theta - 1) + y(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta), (2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)x + y(2\operatorname{sen}^2\theta - 1)) \\ &= (x\cos(2\theta) + y\operatorname{sen}(2\theta), x\operatorname{sen}(2\theta) - y\cos(2\theta)) \\ &= x(\cos(2\theta),\operatorname{sen}(2\theta)) + y(\operatorname{sen}(2\theta), -\cos(2\theta)) \end{aligned}$$

visto como matrices

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Teorema 1. *Sean U y V dos espacios vectoriales, en donde V es de dimensión finita (dim V=n). Sea $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de V y sean $u_1, u_2, ..., u_n$ vectores cualesquiera de U. Existe una única transformación lineal $T : V \to U$ tal que $T(v_i) = u_i$, $i = 1, 2, ..., n$*

Demostración. Para el vector $v \in V$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Definimos $T : V \to U$ de la siguiente manera

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Obsérvese que

$$T(v_i) = T(0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + 0v_n) = u_i$$

de modo que esta transformación posee la propiedad requerida en la conclusión del teorema.
Veamos que T es lineal.
Sean $v, v' \in V$, se tiene entonces

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$
$$v' = \alpha_1' v_1 + \alpha_2' v_2 + \cdots + \alpha_n' v_n$$

Entonces

$$v + v' = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_1' v_1 + \alpha_2' v_2 + \cdots + \alpha_n' v_n$$

de modo que

$$\begin{aligned} T(v + v') &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_1' v_1 + \alpha_2' v_2 + \cdots + \alpha_n' v_n) \\ &= T((\alpha_1 + \alpha_1')v_1 + (\alpha_2 + \alpha_2')v_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_n')v_n) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_1')u_1 + (\alpha_2 + \alpha_2')u_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_n')u_n \\ &= (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 + u_2 + \cdots + \alpha_n + u_n) + (\alpha_1' u_1 + \alpha_2' + u_2 + \cdots + \alpha_n' + u_n) \\ &= T(v) + T(v') \end{aligned}$$

Si $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(cv) &= T(c(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n)) \\ &= T(c\alpha_1 v_1 + c\alpha_2 v_2 + \cdots + c\alpha_n v_n) \\ &= c\alpha_1 u_1 + c\alpha_2 u_2 + \cdots + c\alpha_n u_n \\ &= c(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \\ &= cT(v) \end{aligned}$$

lo que muestra que T es lineal.
Para probar la unicidad de T, supongamos que $\tilde{T} : V \to U$ es una transformación lineal con la propiedad

$$\begin{aligned} \tilde{T}(v) &= \tilde{T}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ & \alpha_1 \tilde{T}(v_1) + \alpha_2 \tilde{T}(v_2) + \cdots + \alpha_n \tilde{T}(v_n) \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \\ &= T(v) \end{aligned}$$

es decir $T(v) = \tilde{T}(v), \quad \forall\ v \in V$, lo que significa entonces que $T = \tilde{T}$. □