Matriz Asociada a una Transformacion Lineal

En seguida se muestra cómo se construye la matriz de una transformación lineal cuando se especifican las bases en el dominio y el contradominio de una tal transformación.
Sean V y U dos espacios vectoriales de dimensión finita, dígase $\dim V = n$ y $\dim U = m$.
Tómese bases β_1 de V y β_2 de U

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$
$$\beta_2 = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$$

Sea $T : V \to U$ una transformación lineal entre estos espacios.
Para el vector $v \in V$ existen escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

Es decir,

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La imagen de v bajo T es el vector

$$T(v) = T(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \cdots + x_nT(v_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(v_j)$$

Cada vector $T(v_j)$, $\quad j = 1, ..., n$ se encuentra en U, de modo que existen escalares $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ tales que

$$T(v_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i, \quad j = 1, ..., n$$

Es decir,

$$[T(v_j)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j = 1, ..., n$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} T(v) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(v_j) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j u_i \end{aligned}$$

$T(v)$ tiene una expresión única en U como combinación lineal de los vectores $u_1, ..., u_m$ de la base β_2 de U, concluimos que

$$(T(v))_{\beta_2} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \right)$$

o bien

$$[T(v)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix}$$

considérese la matriz

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

Obsérvese que

$$A[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} = [T(v)]_{\beta_2}$$

es decir

$$[T(v)]_{\beta_2} = A[v]_{\beta_1}$$

La matriz A es tal que en su j-ésima columna se encuentran los elementos de la matriz de coordenadas del vector $T(v_j)$ (la imagen del j-ésimo vector de la base β_1 de V) con respecto de la base β_2 de U. Esquemáticamente

$$A = [T(v_1)]_{\beta_2} \;\; T(v_2)]_{\beta_2} \;\; \cdots \;\; T(v_n)]_{\beta_2}]$$

esta matriz tiene la propiedad de que multiplicada por la matriz de coordenadas del vector $v \in V$ con respecto a la base β_1 da por resultado la matriz de coordenadas del vector $T(v) \in U$ con respecto a la base β_2 de U.

A esta matriz se le llama matriz de la transformación T con respecto a las bases β_1 y β_2, se tiene entonces que

$$A = [T]_{\beta_1\beta_2}$$

Isomorfismo entre el espacio de matrices y el de transformaciones lineales

Denotamos por $L(V, U)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V a U.

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y U un espacio vectorial de dimensión m con bases*

$$\beta_1 = \{v_1, ..., v_n\}, \quad \beta_2 = \{u_1, ..., u_m\}$$

respectivamente.
La función $F : L(V, U) \to M_{m\times n}$ dada por

$$F(T) = [T]_{\beta_1\beta_2}$$

es un isomorfismo del espacio vectorial $L(V, U)$ al espacio vectorial $M_{m\times n}$

Demostración. 1. Vamos a mostrar que F es lineal.
En este caso los elementos de la j-ésima columna de la matriz $[T_1 + T_2]_{\beta_1 \beta_2}$ son los elementos de la matriz $[(T_1 + T_2)(v_j)]_{\beta_2}$ pero

$$[(T_1 + T_2)(v_j)]_{\beta_2} = [T_1(v_j + T_2(v_j]_{\beta_2}$$
$$= [T_1(v_j]_{\beta_2} + [T_2(v_j]_{\beta_2}$$

como la relación es válida para toda columna j, se concluye

$$F(T_1 + T_2) = [T_1 + T_2]_{\beta_1 \beta_2} = [(T_1]_{\beta_1 \beta_2} + [T_2]_{\beta_1 \beta_2} = F(T_1) + F(T_2)$$

Por otro lado los elementos de la j-ésima columna de la matriz $[cT]_{\beta_1 \beta_2}$ son los elementos de la matriz $[(cT)(v_j)]_{\beta_2}$ pero

$$[(cT)(v_j)]_{\beta_2} = c[T(v_j)]_{\beta_2}$$

como la relación es válida para toda columna j, se concluye

$$F(cT) = [cT]_{\beta_1 \beta_2} = c[T]_{\beta_1 \beta_2} = cF(T)$$

por lo tanto F es lineal

2. Vamos a mostrar que F es una biyección
Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ una matriz $M_{m \times n}$.
Definimos

$$w_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m \in \; U, \quad j = 1, ..., n$$

Sabemos que existe una transformación lineal $T; V \to U$ tal que

$$T(v_j) = w_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m \in \; U, \quad j = 1, ..., n$$

como

$$F(T) = [T]_{\beta_1 \beta_2} = A$$

entonces F es sobreyectiva.
Como T es única estonces F es inyectiva.
Por lo tanto F es un isomorfismo

□