Cambios de base

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, dígase $\dim V = n$
Tómese dos bases β_1,β_2 de V

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

$$\beta_2 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

De manera que para $v \in V$

$$v = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \cdots + \delta_n v_n \qquad (base\ \beta_1) \quad (1)$$

$$v = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \cdots + \varphi u_n \qquad (base\ \beta_2) \quad (2)$$

Es decir,

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix}, \qquad [v]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

Se quiere ver la relación $[v]_{\beta_1}$ y $[v]_{\beta_2}$
Como β_1 es base de V cada u_j, $j = 1, ..., n$ de β_2 se puede escribir de manera única como combinación lineal de β_1. Es decir existen escalares p_{ij} tales que

$$u_j = p_{1j} v_1 + p_{2j} v_2 + \cdots + p_{nj} v_n = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i, \quad j = 1, ..., n$$

o sea que

$$[u_j]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} \qquad j = 1, ..., n$$

Tenemos entonces que

$$v = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \cdots + \varphi u_n = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j u_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \varphi_j v_i$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} p_{1j} \varphi_j \right) v_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} p_{2j} \varphi_j \right) v_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} p_{nj} \varphi_j \right) v_n$$

Al comparar con (1) se tiene

$$\delta_1 = \sum_{j=1}^{n} p_{1j} \varphi_j, \quad \delta_2 = \sum_{j=1}^{n} p_{2j} \varphi_j, \cdots, \delta_n = \sum_{j=1}^{n} p_{nj} \varphi_j$$

o sea

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\varphi_j$$

considérese la matriz $P = (p_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ en cuya j-ésima columna se encuentran los elementos de la matriz $[u_j]_{\beta_1}$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

esquemáticamente

$$P = [[u_1]_{\beta_1} \quad [u_2]_{\beta_1} \quad \cdots \quad [u_n]_{\beta_1}]$$

Obsérvese que

$$P[v]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} p_{1j}\varphi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} p_{nj}\varphi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = [v]_{\beta_1}$$

es decir la matriz de coordenadas de v respecto a la base β_1 se obtiene multiplicando la matriz P por la matriz de coordenadas de v respecto a la base β_2.
Si se intercambian los papeles de β_1 y β_2 se obtiene la siguiente situación dual

$$Q[v]_{\beta_1} = [v]_{\beta_2}$$

en donde la matriz

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

es la que tiene en su i-ésima columna los elementos de la matriz de coordenadas del i-ésimo vector de v_i de la base β_1 respecto de la base β_2, es decir,

$$Q = [[v_1]_{\beta_2} \quad [v_2]_{\beta_2} \quad \cdots \quad [v_n]_{\beta_2}] \quad [v_i]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} q_{1i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{bmatrix}$$

Definición 1. *A la matriz de orden n tal que*

$$P[v]_{\beta_2} = [v]_{\beta_1}$$

se le llama matriz de cambio de base de β_2 a β_1.

Se ha visto que P es una matriz inversible y que P^{-1} es la matriz de cambio de base de β_1 a β_2, es decir

$$[v]_{\beta_2} = P^{-1}[v]_{\beta_1}$$

Ejemplo En el espacio de las matrices $M_{2\times 2}$ consideremos las siguientes bases

$$\beta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\beta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right\}$$

En este caso

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se puede hallar Q la matriz de cambio de base de β_1 a β_2, calculando P^{-1}.
Esta es

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \\ -6 & 3 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el vector

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[v]_{\beta_2} = Q[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \\ -6 & 3 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -34 \\ 24 \end{bmatrix}$$