Operaciones con Transformaciónes Lineales

Suma de Transformaciónes Lineales

Ejemplo Considérese las transformaciones $T_1,\ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$T_1(x, y) = (3x + 2y, 5x - y)$$

$$T_2(x, y) = (-4x + 5y, -x + 7y)$$

La suma de T_1 y T_2 es la transformación $T_1 + T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(T_1 + T_2)(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y)$$

$$= (3x + 2y, 5x - y) + (-4x + 5y, -x + 7y)$$

$$= (-x + 7y, 4x + 6y)$$

Ahora bien si se toma la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, se tiene

$$T_1 + T_2(x, y) = (-x + 7y, 4x + 6y) \ \Rightarrow\ T_1 + T_2(1, 0) = (-4, -1)$$

$$T_1 + T_2(x, y) = (-x + 7y, 4x + 6y) \ \Rightarrow\ T_1 + T_2(0, 1) = (5, 7)$$

se tiene entonces

$$A_{T_1+T_2} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora bien si se toma la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, se tiene

$$T_1(x, y) = (3x + 2y, 5x - y) \ \Rightarrow\ T_1(1, 0) = (3, 5)$$

$$T_1(x, y) = (3x + 2y, 5x - y) \ \Rightarrow\ T_1(0, 1) = (2, -1)$$

de manera que

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Para T_2 se toma la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, se tiene

$$T_2(x, y) = (-4x + 5y, -x + 7y) \ \Rightarrow\ T_1(1, 0) = (-4, -1)$$

$$T_2(x, y) = (-4x + 5y, -x + 7y) \ \Rightarrow\ T_1(0, 1) = (5, 7)$$

de manera que

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$A_{T_1+T_2} = A_{T_1} + A_{T_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

De manera que $A_{T_1+T_2} = A_{T_2} + A_{T_1}$

Composición de Transformaciónes Lineales

Ejemplo Considérese las transformaciones $T_1,\ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$T_1(x,y) = (ax+by, cx+dy)$$

$$T_2(x,y) = (ex+fy, gx+hy)$$

La composición de T_1 y T_2 es la transformación $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(x,y) = T_2(ax+by, cx+dy) &= (e(ax+by)+f(cx+dy), g(ax+by)+h(cx+dy)) \\ &= (eax+eby+fcx+fdy, gax+gby+hcx+hdy) \\ &= ((ea+fc)x+(eb+fd)y, (ga+hc)x+(gb+hd)y) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$A_{T_2} \cdot A_{T_1} = \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

De manera que $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} \cdot A_{T_1}$

La Transformación Inversa

Si una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se puede representar con una matriz A_T

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_T X$$

y si existe la matriz inversa de A_T^{-1} se tiene entonces

$$\begin{aligned} A_T X = B \ &\Rightarrow\ A_T^{-1} A_T X = A_T^{-1} B \\ &\Rightarrow\ X = A_T^{-1} B \end{aligned}$$

se tiene entonces que la matriz asociada a la transformación inversa T^{-1} de T es $A_{T^{-1}}$ que resulto ser la inversa de la matriz asociada a la transformación T, es decir

$$A_{T^{-1}} = A_T^{-1}$$