Matriz Asociada a una Transformacion Lineal

En seguida se muestra cómo se construye la matriz de una transformación lineal cuando se especifican las bases en el dominio y el contradominio de una tal transformación.
Sean V y U dos espacios vectoriales de dimensión finita, dígase $\dim V = n$ y $\dim U = m$.
Tómese bases β_1 de V y β_2 de U

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

$$\beta_2 = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$$

Sea $T : V \to U$ una transformación lineal entre estos espacios.
Para el vector $v \in V$ existen escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

Es decir,

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La imagen de v bajo T es el vector

$$T(v) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \cdots + x_n T(v_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j)$$

Cada vector $T(v_j), \quad j = 1, ..., n$ se encuentra en U, de modo que existen escalares $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ tales que

$$T(v_j) = a_{1j} u_1 + a_{2j} u_2 + \cdots + a_{mj} u_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i, \quad j = 1, ..., n$$

Es decir,

$$[T(v_j)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j = 1, ..., n$$

Tenemos entonces que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j u_i$$

donde

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{v}$$

A es la matriz asociada a la transformación lineal

$\boxed{\text{La Matriz de una Transformación Lineal respecto a una base}}$

Si V y U son dos espacios vectoriales y $T : V \to U$ es una transformción lineal, dadas bases

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \quad \beta_1 \in \ V$$

$$\beta_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}, \quad \beta_2 \in \ U$$

Para el vector $v_j \in V, \ \ j = 1, ..., n$ existen escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que

$$v_j = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

ya comprobamos que la matriz de columnas

$$T(v_j) \underbrace{=}_{\beta_1} \begin{bmatrix} T(x_1v_1) \\ T(x_2v_2) \\ \vdots \\ T(x_nv_n) \end{bmatrix}$$

expresados en coordenadas respecto a la base U

$$T(v_j) \underbrace{=}_{\beta_1} \begin{bmatrix} T(x_1v_1) \\ T(x_2v_2) \\ \vdots \\ T(x_nv_n) \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\beta_2} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{v}$$

esto permite obtener la imagen de $v_j \in V$ bajo T con solo multiplicar la matriz A por el vector columna de las coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ de $v_j \in V$ bajo la base β_1 de V

Ejemplo Para la homotecia de razón k en $\mathbb{R}^2$, dada por

$$H_k(x, y) = (kx, ky)$$

consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y tenemos entonces

$$H_k(1, 0) = (k, 0), \quad H_k(0, 1) = (0, k)$$

por lo que la matriz A_{H_k} de homotecia es

$$A_{H_k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

de esta manera podemos obtener la imagen de cada elemento del dominio, es decir si $(3,2) \in \mathbb{R}^2$ entonces su imagen es:

$$H_k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ 2k \end{pmatrix}$$

Ejemplo Para la rotación en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen por un ángulo θ

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$

consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ y tenemos entonces

$$R_\theta(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \quad R_\theta(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

por lo que la matriz A_{R_θ} de rotación un ángulo θ es

$$A_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

de esta manera podemos obtener la imagen de cada elemento del dominio, es decir si $(3,2) \in \mathbb{R}^2$ entonces su imagen bajo la rotación en un ángulo $\frac{\pi}{2}$ es:

$$R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$