Isomorfismo entre el espacio de matrices y el de transformaciones lineales

Denotamos por $L(V, U)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V a U.

Teorema 1. *Si V y U son espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $L(V, U)$ es un espacio de dimensión finita y*

$$\dim\ L(V, U) = (\dim\ V)(\dim\ U)$$

Demostración. Sea $n = \dim\ V$ $m = \dim\ U$. Tomamos una base de V

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Y una base de U

$$\beta_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

Definimos las funciones

$$f_{ij} : V \to U, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

de la siguiente manera: para $v \in V$ escribáse

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

entonces

$$f_{ij}(v) = \lambda_j u_i$$

Dada el conjunto

$$\beta = \{f_{ij} \mid i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n\}$$

vamos a probar que β es una base para $L(V, U)$.

1. β genera L(V,U)
   Sea $T \in L(V, U)$ y veámos que T se puede expresar como una combinación lineal de elementos de β.
   Para $vj \in \beta_1$, $j = 1, \ldots, n$ escribimos el vector $T(v_j) \in U$ como combinación lineal de los vectores de la base β_2 de U.

$$T(v_j) = \alpha_{1j}u_1 + \alpha_{2j}u_2 + \cdots + \alpha_{mj}u_m, \qquad j = 1, \ldots, n$$

   Definimos la transformación lineal $\widetilde{T} \in L(\beta)$ como

$$\widetilde{T} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij}$$

   Pd. $T = \widetilde{T}$.
   Tenemos que

$$f_{ij}(v_k) = \begin{cases} u_i & si \quad j = k \\ 0 & si \quad j \neq k \end{cases}$$

   Entonces

$$\widetilde{T}(v_k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij}(v_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} u_i = T(v_k)$$

Se tiene entonces que T y $\widetilde{T}$ coinciden en todos los vectores de la base β_1 de V.
Entonces $T = \widetilde{T}$ y por lo tanto

$$L(\beta) = L(V, U)$$

2. las transformaciones f_{ij} son linealmente independientes
Consideremos la combinación lineal

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_{ij} = 0$$

Es decir

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij}(v) = 0, \qquad \forall\ v \in V$$

En particular para $v = v_k$, $k = 1, \dots, n$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij}(v_k) = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} u_i = 0, \qquad k = 1, \dots, n$$

Esta última expresión implica a su vez que $c_{ik} = 0$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$ (pues los vectores $u_1, u_2, \dots, u_m$ son linealmente independientes). Por tanto, los vectores f_{ij} de β son linealmente independientes.

$\square$

Ejemplo Si $dim\ V = 2$ y dim $U = 3$, el espacio vectorial $L(V, U)$ tiene por base a las 6 transformaciones lineales $f_{ij} : V \to U$, $i = 1, dots, 3$, $j = 1, 2$ dadas por

$$f_{11}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u_1$$

$$\begin{aligned}
f_{12}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_2 u_1 \\
f_{21}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_1 u_2 \\
f_{22}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_2 u_2 \\
f_{31}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_1 u_3 \\
f_{32}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_2 u_3
\end{aligned}$$

en donde $\beta_1 = \{v_1, v_2\}$ y $\beta_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ son bases de V y U, respectivamente. En este caso cualquier transformación $T \in L(V, U)$ puede expresarse como

$$T = \alpha_{11} f_{11} + \alpha_{12} f_{12} + \alpha_{21} f_{21} + \alpha_{22} f_{22} + \alpha_{31} f_{31} + \alpha_{32} f_{32}$$

en donde

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= \alpha_{11} u_1 + \alpha_{21} u_2 + \alpha_{31} u_3 \\
T(v_2) &= \alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{32} u_3
\end{aligned}$$

Ahora vamos a obtener la matriz $[f_{11}]_{\beta_1\beta_2}$. Se tiene

$$f_{11}(v_1) = u_1 \;\Rightarrow\; [f_{11}(v_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{11}(v_2) = 0 \;\Rightarrow\; [f_{11}(v_2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$[f_{11}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Unos cuantos cálculos más muestran que

$$[f_{12}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [f_{21}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [f_{22}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad etc$$

Es decir, que $[f_{ij}]_{\beta_1\beta_2}$ es la matriz de orden 3×2 que tiene por elementos solamente ceros excepto el elemento de la i-ésima línea y j-ésima columna que es 1.