Isomorfismo entre el espacio de matrices y el de transformaciones lineales

Denotamos por $L(V,U)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V a U.

Teorema 1. *Si V y U son espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $L(V,U)$ es un espacio de dimensión finita y*

$$\dim\ L(V,U) = (\dim\ V)(\dim\ U)$$

Ejemplo Si *dim* $V = 2$ y dim $U = 3$, y $f_{ij} : V \to U$, $i = 1, \ldots, 3$, $j = 1, 2$ esta dada por

$$f_{ij}(v) = \lambda_j u_i$$

Entonces el espacio vectorial $L(V,U)$ tiene por base a las 6 transformaciones lineales dadas por

$$f_{11}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u_1$$

$$f_{12}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_2 u_1$$

$$f_{21}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u_2$$

$$f_{22}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_2 u_2$$

$$f_{31}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u_3$$

$$f_{32}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_2 u_3$$

en donde $\beta_1 = \{v_1, v_2\}$ y $\beta_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ son bases de V y U, respectivamente. En este caso cualquier transformación $T \in L(V,U)$ puede expresarse como

$$T = \alpha_{11} f_{11} + \alpha_{12} f_{12} + \alpha_{21} f_{21} + \alpha_{22} f_{22} + \alpha_{31} f_{31} + \alpha_{32} f_{32}$$

en donde

$$T(v_1) = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{21} u_2 + \alpha_{31} u_3$$

$$T(v_2) = \alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{32} u_3$$

Ahora vamos a obtener la matriz $[f_{11}]_{\beta_1\beta_2}$. Se tiene

$$f_{11}(v_1) = u_1 \ \Rightarrow\ [f_{11}(v_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{11}(v_2) = 0 \ \Rightarrow\ [f_{11}(v_2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$[f_{11}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a obtener la matriz $[f_{12}]_{\beta_1\beta_2}$. Se tiene

$$f_{12}(v_1) = 0 \ \Rightarrow\ [f_{12}(v_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{12}(v_2) = u_1 \ \Rightarrow\ [f_{12}(v_2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$[f_{12}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a obtener la matriz $[f_{21}]_{\beta_1\beta_2}$. Se tiene

$$f_{21}(v_1) = u_2 \ \Rightarrow\ [f_{21}(v_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{21}(v_2) = 0 \ \Rightarrow\ [f_{21}(v_2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$[f_{21}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a obtener la matriz $[f_{22}]_{\beta_1\beta_2}$. Se tiene

$$f_{22}(v_1) = 0 \ \Rightarrow\ [f_{21}(v_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{22}(v_2) = u_2 \ \Rightarrow\ [f_{21}(v_2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$[f_{22}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a obtener la matriz $[f_{31}]_{\beta_1\beta_2}$. Se tiene

$$f_{31}(v_1) = u_3 \ \Rightarrow\ [f_{31}(v_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_{31}(v_2) = 0 \;\Rightarrow\; [f_{31}(v_2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$[f_{31}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a obtener la matriz $[f_{32}]_{\beta_1\beta_2}$. Se tiene

$$f_{32}(v_1) = 0 \;\Rightarrow\; [f_{31}(v_1)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{32}(v_2) = u_3 \;\Rightarrow\; [f_{32}(v_2)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$[f_{32}]_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, que $[f_{ij}]_{\beta_1\beta_2}$ es la matriz de orden 3×2 que tiene por elementos solamente ceros excepto el elemento de la i-ésima línea y j-ésima columna que es 1.