

Trazas, Adjuntas y Ortogonalidad

Desigualdad del Triángulo En un espacio vectorial V con $\langle, \rangle$ se cumple

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) + \|v\|^2\end{aligned}$$

Tenemos que para cualquier complejo $z = a + ib$ se tiene

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2 \Rightarrow |z| \geq |a| \Rightarrow |z| \geq |\operatorname{Re}(z)|$$

por lo que

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) + \|v\|^2$$

por desigualdad de Schwarz

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

por lo que

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ \Rightarrow \|u + v\|^2 &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \\ \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\|\end{aligned}$$

□

Matrices Traspuestas, Conjugadas y Trazas

Definición 1. Sea $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ una matriz $M_{m \times n}$ se define la traspuesta de la matriz A que se denota A^t como

$$A^t = (a_{j,i})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

Definición 2. Sea $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ una matriz $M_{n \times n}$ se define la conjugada de la matriz A que se denota $\overline{A}$ como

$$\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Definición 3. Sea $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ una matriz $M_{n \times n}$ se define la traza de la matriz A que se denota $\operatorname{tr}(A)$ como

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Teorema 1. Sean A, B matrices tal que $A, B \in M_{n \times n}$ se cumplen las siguientes propiedades

1. $tr(AB) = tr(BA)$
2. $tr(A) = tr(A^t)$
3. $tr(\overline{A}) = \overline{tr(A)}$

Demostración. para (1) se tiene

$$tr(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} = tr(BA)$$

para (2) se tiene

$$tr(A) = \sum_i a_{ii} = tr(A^t)$$

para (3) se tiene

$$tr(\overline{A}) = \sum_i \overline{a_{ii}} = \overline{\sum_i a_{ii}} = \overline{tr(A)}$$

□

Matriz Adjunta

Definición 4. Sea A una matriz de $m \times n$ con elementos en F . Definimos la traspuesta conjugada (o adjunta) de A como la matriz A^* de $n \times m$ tal que

$$a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$$

Teorema 2. Sean A, B matrices tal que $A, B \in M_{n \times n}$ se cumplen las siguientes propiedades

1. Las operaciones de trasponer y conjugar matrices conmutan, es decir

$$\overline{A^t} = \overline{A}^t$$

2. $\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$

Demostración. para (1) se tiene

$$\overline{A^t} = \overline{a_{i,j}^t}_{j=1,\dots,n} = (\overline{a_{j,i}})_{i=1,\dots,m} = (\overline{a_{i,j}})^t_{j=1,\dots,n} = \overline{A}^t$$

para (2) se tiene

$$\overline{AB} = \overline{\sum_k a_{ik} b_{kl}} = \sum_k \overline{a_{ik} b_{kl}} = \sum_k \overline{a_{ik}} \overline{b_{kl}} = \overline{A} \overline{B}$$

□



Teorema 3. Sean A, B matrices de $n \times n$. El producto interior

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(\overline{B^t} A)$$

es efectivamente un producto interior

Demostración. 1. Vamos a comprobar que $\langle B, A \rangle = \overline{\langle A, B \rangle}$, en este caso

$$\begin{aligned} \langle B, A \rangle &= \text{tr}(\overline{A^t} B) = \text{tr}(B \overline{A^t}) = \text{tr}(B^{tt} \overline{A^t}) = \text{tr}(\overline{A B^t})^t \\ &= \text{tr}(\overline{A B^t}) = \text{tr}(\overline{\overline{A B^t}}) = \text{tr}(\overline{A \overline{B^t}}) = \overline{\text{tr}(\overline{B^t} A)} = \overline{\langle A, B \rangle} \end{aligned}$$

2. comprobaremos que $\langle A, A \rangle > 0$, en este caso

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(\overline{A^t} A) = \sum_i \sum_k \overline{a_{ik}} a_{ik} = \sum_i \sum_k \overline{a_{ki}} a_{ki} = \sum_i \sum_k |a_{ki}|^2 > 0$$

3. Vamos a comprobar $\langle \lambda A, B \rangle = \lambda \langle A, B \rangle$ en este caso

$$\langle \lambda A, B \rangle = \text{tr}(\overline{B^t} \lambda A) = \sum_i \sum_k \overline{b_{ik}} \lambda a_{ki} = \lambda \sum_i \sum_k \overline{b_{ik}} a_{ki} = \lambda \text{tr}(\overline{B^t} A) = \lambda \langle A, B \rangle$$

4. Vamos a comprobar $\langle A, \lambda B \rangle = \overline{\lambda} \langle A, B \rangle$ en este caso

$$\langle A, \lambda B \rangle = \text{tr}(\overline{\lambda B^t} A) = \sum_i \sum_k \overline{\lambda b_{ik}} a_{ki} = \overline{\lambda} \sum_i \sum_k \overline{b_{ik}} a_{ki} = \overline{\lambda} \text{tr}(\overline{B^t} A) = \overline{\lambda} \langle A, B \rangle$$

5. Vamos a comprobar que $\langle A + B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$, en este caso

$$\begin{aligned} \langle A + B, C \rangle &= \text{tr}(\overline{C^t} (A + B)) = \text{tr}(\overline{C^t} A + \overline{C^t} B) = \text{tr}(\overline{C^t} A) + \text{tr}(\overline{C^t} B) \\ &= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

□