Ortogonalidad

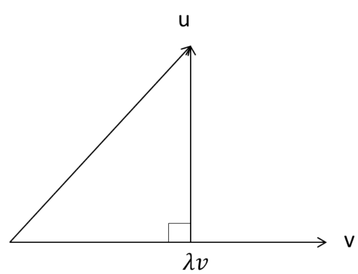
Definición 1. *Decimos que u, v en un espacio vectorial con producto interior, son ortogonales si*

$$\langle u, v\rangle = 0$$

esto se puede representa $u \perp v$

Observación Si $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente en un espacio V de dimensión finita, entonces $\exists\ \lambda \in F$ tal que

$$(u - \lambda v) \perp v$$



Demostración. Resolviendo el siguiente producto escalar

$$\langle u - \lambda v, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\ \langle u, v\rangle + \langle -\lambda v, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\ \langle u, v\rangle - \lambda\langle v, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\ \langle u, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$$

$$\Rightarrow\ \lambda = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$$

Se tiene que $\langle v, v\rangle \neq 0$ pues v es un elemento de un conjuto linealmente independiente $\square$

Definición 2. *Si u, v son dos vectores en V con $\langle,\rangle$,*

$$\cos\ \alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|\ \|u\|}$$

Definición 3. *Sea V un espacio con producto interior. Un subconjunto S de V es ortogonal si cualquier par de elementos distintos de S es ortogonal*

Proposición 1. *Un subconjunto ortogonal S de V es un subespacio de V*

Demostración. 1. Vamos a ver que $0 \in S$

Demostración.

$$\langle v, 0\rangle = \overline{\langle 0, v\rangle} = \overline{0\langle 0, v\rangle} = \overline{0} = 0$$

$\therefore \quad 0 \in S$ □

2. Si $w_1, w_2 \in S$, $c \in F$ entonces

$$\begin{aligned}\langle v, w_1 + cw_2\rangle &= \langle v, w_1\rangle + \langle v, cw_2\rangle \\ &= 0 + \langle v, cw_2\rangle \\ &= \overline{c}\langle v, w_2\rangle = 0\end{aligned}$$

por lo que S es un subespacio

3. S es un conjunto linealmente independiente

Demostración. Sean $w_1, w_2, ..., w_n \in S$ y supóngase que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

se tiene entonces que para cualquier $0 \leq j \leq n$

$$0 = \langle 0, w_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i w_i, w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle w_i, w_j\rangle = a_j\langle w_j, w_j\rangle = a_j |w_j|^2$$

como $w_j \neq 0$ tenemos que $a_j = 0$. Por lo tanto S es linealmente independiente □

□

Teorema 1. *Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio con producto interior, y sea W el espacio generado por el conjunto ortonormal de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. El vector $u \in V$ pertenece a W si y solo si u puede escribirse*

$$u = \langle u, v_1\rangle \; v_1 + \langle u, v_2\rangle \; v_2 + \cdots + \langle u, v_x\rangle \; v_k$$

Demostración. Si el vector $u \in V$ puede escribirse como

$$u = \langle u, v_1\rangle \; v_1 + \langle u, v_2\rangle \; v_2 + \cdots + \langle u, v_x\rangle \; v_k$$

entonces debe ocurrir que $u \in W$, pues se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$.
Si $u \in W$ entonces existen escalares $c_1, c_2, ..., c_k$ tal que

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_3 + c_3 v_v + \cdots + c_k v_k = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$$

al tomar el producto escalar de u con v_j con $1 \leq j \leq k$ se tiene

$$\langle u, v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} c_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i \langle v_i, v_j\rangle$$

pero $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$. También se cumple $\langle v_i, v_i\rangle = \|i\|^2 = 1$ (el conjunto es ortonormal) por lo tanto $\langle u, v_j\rangle = c_j$. Por lo que

$$u = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i = \langle u, v_1\rangle\ v_1 + \langle u, v_2\rangle\ v_2 + \cdots + \langle u, v_x\rangle\ v_k$$

□

Teorema 2. *Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio con producto interior y sea W el subespacio de V generado por el conjunto ortonormal $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Si u es un vector de W se tiene*

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle^2$$

Demostración. Según lo anterior

$$u = \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle v_i$$

entonces

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle v_i, u \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle\ \langle v_i, u\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle^2$$

□

Identidad de Parseval Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio con producto interior y M el espacio generado por el conjunto ortonormal $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Si $u \in M$ y $w \in V$ entonces

$$\langle u, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle \langle v_i, w\rangle$$

Demostración. Si $u \in M$ entonces

$$u = \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle v_i$$

por lo que

$$\langle u, w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle v_i, w \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle\ \langle v_i, w\rangle$$

□

Desigualdad de Bessel Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio con producto interior y sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un conjunto ortonormal de vectores en V. Si $u \in V$ se tiene

$$\|u\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_j\rangle^2$$

Demostración. Se considera el vector

$$w = u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle v_i$$

por lo que

$$\|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \left\langle u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle v_i, u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle v_i \right\rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \left\langle u, \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle v_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle v_i, u \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle v_i, \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle v_i \right\rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle \langle u, v_i \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle \langle v_i, u \rangle + \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle \langle v_i, v_i \rangle$$

como $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1$ entonces

$$= \langle u, u \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle \langle u, v_i \rangle \cancel{- \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle \langle v_i, u \rangle + \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle \langle u, v_i \rangle}$$

$$= \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle^2$$

$$\Rightarrow \ \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i \rangle^2 \geq o$$

$$\Rightarrow \ \|u\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_j \rangle^2$$

□