Unicidad del Determinante

Sea A la matriz cuadrada de orden n siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El determinante de A, denotado det A, está definido por la fórmula

$$\det\ A = \sum_{\sigma} (sgn\ \sigma) a_{1\ \sigma(1)} a_{2\ \sigma(2)} \cdots a_{n\ \sigma(n)}$$

donde cada suma se hace sobre las $n!$ permutaciones del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$
Ahora bien se tiene

$$A = \begin{bmatrix} \leftarrow & r_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & r_1 & \rightarrow \end{bmatrix}$$

Observamos que

$$r_i = \sum_j a_{ij} e_j$$

donde e_j es el vector de la base canónica.
Tenemos entonces

$$\det\ A = \det \begin{bmatrix} \leftarrow & r_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & r_n & \rightarrow \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \sum_j a_{1j} e_j \\ \leftarrow\ r_2\ \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow\ r_1\ \rightarrow \end{bmatrix}$$

$$= \sum_j a_{1j} \det \begin{bmatrix} \leftarrow & e_j & \rightarrow \\ \leftarrow & r_2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & r_1 & \rightarrow \end{bmatrix}$$

Procedemos analogamente para el renglón 2 y tenemos

$$= \sum_j a_{1j} \sum_k a_{2k} \det \begin{bmatrix} \leftarrow & e_j & \rightarrow \\ \leftarrow & e_k & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & r_1 & \rightarrow \end{bmatrix}$$

continuando con el procedimiento para los n renglones, usando $j_1, j_2, ..., j_n$ para los indices en la suma, se tiene

$$\det\ A = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \det \begin{bmatrix} \leftarrow & e_{j_1} & \rightarrow \\ \leftarrow & e_{j_2} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & e_{j_n} & \rightarrow \end{bmatrix}$$

Si estamos considerando que todos los renglones son diferentes, entonces los términos $j_1, j_2, ..., j_n$ son distintos. Entonces el conjunto $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ es una permutación σ del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. En ese caso se tiene

$$\det\ A = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{bmatrix} \leftarrow & e_{\sigma(1)} & \rightarrow \\ \leftarrow & e_{\sigma(2)} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & e_{\sigma(n)} & \rightarrow \end{bmatrix}$$

Ahora bien

$$\begin{bmatrix} \leftarrow & e_{\sigma(1)} & \rightarrow \\ \leftarrow & e_{\sigma(2)} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & e_{\sigma(n)} & \rightarrow \end{bmatrix}$$

Es justo la matriz identidad permutada por σ. Cada permutación es el producto de transposiciones entonces

$$\det \begin{bmatrix} \leftarrow & e_{\sigma(1)} & \rightarrow \\ \leftarrow & e_{\sigma(2)} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & e_{\sigma(n)} & \rightarrow \end{bmatrix} = (sgn\ \sigma) \det\ (I)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \det\ A &= \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{bmatrix} \leftarrow & e_{\sigma(1)} & \rightarrow \\ \leftarrow & e_{\sigma(2)} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & e_{\sigma(n)} & \rightarrow \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} (sgn\ \sigma) \det\ (I) \\ &= \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} (sgn\ \sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

que es la fórmula del determinante