Ejemplos de Espacios Vectoriales $\mathbb{R}^2$

Ejemplo $\mathbb{R}^2$

El conjunto de vectores en este espacio es el conjunto de parejas ordenadas de números reales x_1, x_2, es decir

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2\}$$

Al vector $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se le denotará simplemente como x. Es decir se escribirá $x = (x_1, x_2)$. A los números $x = (x_1, x_2)$ se les llama coordenadas del vector x. Similarmente se escribirá $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ etc., para denotar a los vectores en este espacio.
En $\mathbb{R}^2$ se define la suma de los vectores $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ coordenada a coordenada, es decir $x + y$ es el vector en $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son las correspondientes sumas de coordenadas de x y y. O sea

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Similarmente el producto del vector $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ por el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se define coordenada a coordenada, o sea,

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

Vamos a verificar que dicho conjunto satisface las propiedades de espacio vectorial.

1. La suma es conmutativa

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2) \\ &= y + x \end{aligned}$$

2. La suma es asociativa

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)] \\ &= (x_1, x_2) + [y_1 + z_1, y_2 + z_2] \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

3. Existe el cero en $\mathbb{R}^2$. Escríbase $0 \in \mathbb{R}^2$ como $0 = (0, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} x + 0 &= (x_1, x_2) + (0, 0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0) \\ &= (x_1, x_2) \\ &= x \end{aligned}$$

4. Para $x \in \mathbb{R}^2$, existe $(-x) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x + (-x) = 0$. Escríbase $-x = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$ Por lo tanto

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2) \\ &= (0, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. Se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2) + ((\lambda y_1, \lambda y_2)) \\ &= \lambda x + \lambda y \end{aligned}$$

6. Se tiene propiedad distributiva

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)x &= ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu x_1, \mu x_2) \\ &= \lambda x + \mu x \end{aligned}$$

7. se tiene que

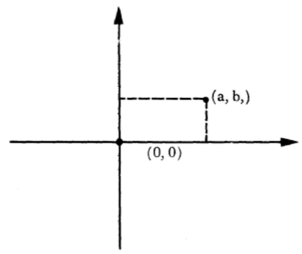
$$\begin{aligned} (\lambda\mu)x &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2) \\ &= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2)) \\ &= \lambda(\mu x_1, \mu x_2) \\ &= \lambda(\mu x) \end{aligned}$$

8. se tiene

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) \\ &= (x_1, x_2) \\ &= x \end{aligned}$$

Esto demuestra entonces que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial.

El concepto de espacio vectorial puede ilustrarse en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.
Llamamos plano cartesiano real al plano de la geometría analítica, es decir, al producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de los reales por si mismos. Los elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son las parejas ordenadas (a, b) de números reales. Estas se representan como puntos



Escribimos $\mathbb{R}^2$ en lugar de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y, en general, $\mathbb{R}^n$ en lugar $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n factores).
A los elementos de $\mathbb{R}^2$, es decir, a los puntos del plano les llamaremos vectores y, a los números reales les llamaremos escalares.
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se definen las operaciones

Suma de vectores Dados dos elementos $(a, b),\ (c, d) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

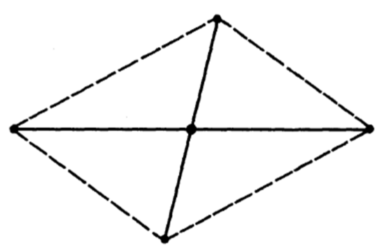
Producto de un escalar por un vector Dado un elementos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Al referirnos a un vector (a, b) diremos que a es la primera coordenada (o abcisa) de (a, b) y que b es la segunda coordenada (u ordenada) del mismo.

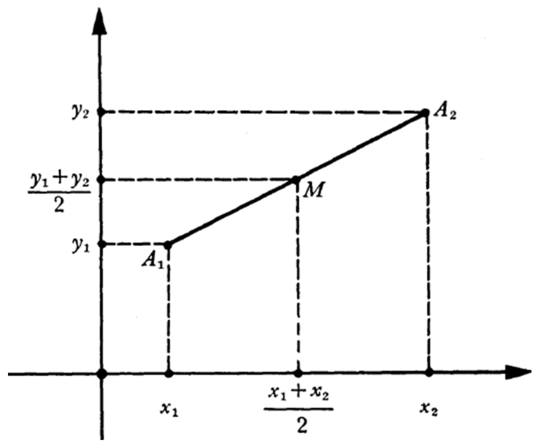
Interpretación geométrica de la adición Para esto será necesario recordar los dos siguientes resultados

a) Si las diagonales de un cuadrilátero se intersecan en su punto medio, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo



b) Si $A_1 = (x_1, y_1)$ y $A_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, entonces el punto medio del segmento A_1A_2 es

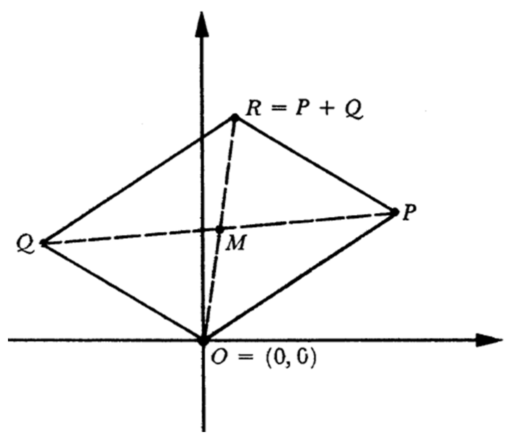
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Una interpretación geométrica de la adición de vectores Sean $P=(a,b)$, $Q=(c,d)$ y $R=P+Q$, es decir

$$R=(a+c,b+d)$$

Consideremos el cuadrilátero OPRQ



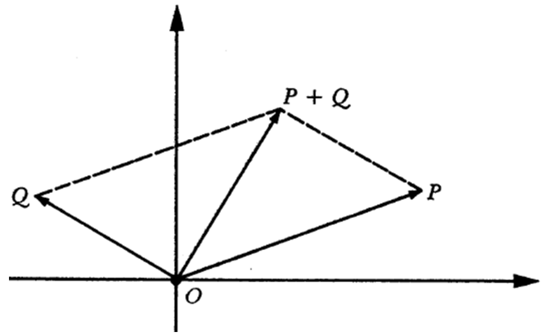
El punto medio de OR es

$$\left(\frac{a+c+0}{2},\frac{b+d+0}{2}\right)$$

El punto medio de PQ es

$$\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$$

por lo que vemos que las diagonales tienen el mismo punto medio. Por tanto, el cuadrilátero es un paralelogramo.
Si al representar los vectores en el plano dibujamos flechas que vayan del origen O al punto respectivo,



entonces podemos describir la adición diciendo que la suma de dos vectores P y Q es el vector determinado por la diagonal del paralelogramo de lados OP y OQ.

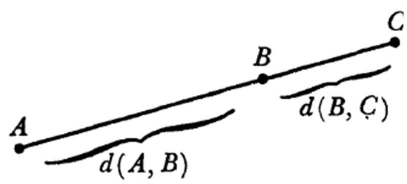
Una interpretación geométrica del producto de un escalar por un vector Para esto será necesario recordar dos resultados:

a) La distancia $d(A_1, A_2)$ entre los puntos $A_1 = (x_1, y_1)$ y $A_2 = (x_2, y_2)$ es

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

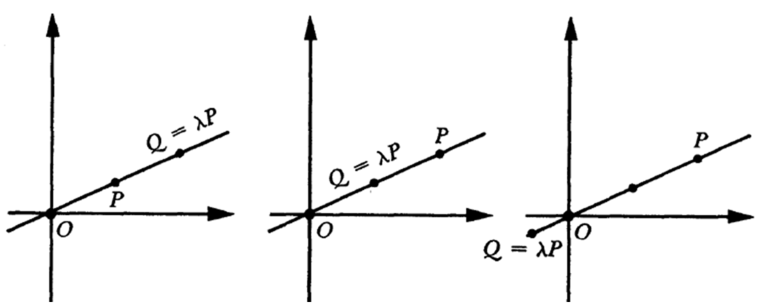
b) Si A,B y C son tres puntos del plano, entonces B está en el segmento AC si y solamente si

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$



Significado geométrico del producto escalar Se tiene que λ por un vector $P = (a, b)$.
Si $P = 0 = (0, 0)$, entonces $\lambda \cdot 0 = 0$ para toda λ.
Supongamos ahora que $P \neq 0$ y sea $Q = \lambda P$. Demostraremos que

1. Si $\lambda \geq 1$, P está en el segmento OQ.
2. Si $0 \leq \lambda \leq 1$, Q está en el segmento OP.
3. Si $\lambda \leq 0$, está en el segmento PQ



Denotemos con c a la distancia $d(O,P)=\sqrt{a^2+b^2}=c$.
Entonces

$$d(O,Q)=d(O,\lambda P)=\sqrt{(\lambda a)^2+(\lambda b)^2}=|\lambda|c$$

$$d(P,Q)=\sqrt{(a-\lambda a)^2+(b-\lambda b)^2}=\sqrt{(1-\lambda)^2(a^2+b^2)}=|1-\lambda|\sqrt{a^2+b^2}=|1-\lambda|c$$

Veamos ahora los tres casos:

1. Caso 1. Por ser $\lambda\geq 1$, $|\lambda|=\lambda$ y $|1-\lambda|=\lambda-1$. Entonces

   $$d(O,P)+d(P,Q)=c+(\lambda-1)c=\lambda c=d(O,Q)$$

   de donde, $P\in OQ$.
2. Caso 2. Si $0\leq\lambda\leq 1$, $|\lambda|=\lambda$ y $|1-\lambda|=1-\lambda$. Por consiguiente,

   $$d(O,Q)+d(Q,P)=\lambda c+(1-\lambda)c=c=d(O,P)$$

   de donde, $Q\in OP$.
3. Caso 3. Si $\lambda\leq 0$, $|\lambda|=-\lambda$ y $|1-\lambda|=1-\lambda$. Por consiguiente,

   $$d(Q,O)+d(O,P)=-\lambda c+c=(1-\lambda)c=d(P,Q)$$

   de donde, $O\in QP$

En todos los casos tenemos que el punto λP pertenence a la recta OP