Ejemplos de Espacios Vectoriales $\mathbb{R}^3$

Ejemplo $\mathbb{R}^3$

El conjunto de vectores en este espacio es el conjunto de terna ordenadas de números reales x_1, x_2, x_3, es decir

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3\}$$

Al vector $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se le denotará simplemente como x. Es decir se escribirá $x = (x_1, x_2, x_3)$. A los números $x = (x_1, x_2, x_3)$ se les llama coordenadas del vector x. Similarmente se escribirá $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ etc., para denotar a los vectores en este espacio.
En $\mathbb{R}^3$ se define la suma de los vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$ coordenada a coordenada, es decir $x + y$ es el vector en $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son las correspondientes sumas de coordenadas de x y y. O sea

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Similarmente el producto del vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ por el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se define coordenada a coordenada, o sea,

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

Vamos a verificar que dicho conjunto satisface las propiedades de espacio vectorial.

1. La suma es conmutativa

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) \\ &= y + x \end{aligned}$$

2. La suma es asociativa

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, x_3) + [(y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)] \\ &= (x_1, x_2, x_3) + [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

3. Existe el cero en $\mathbb{R}^3$. Escríbase $0 \in \mathbb{R}^3$ como $0 = (0, 0, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} x + 0 &= (x_1, x_2, x_3) + (0, 0, 0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= x \end{aligned}$$

4. Para $x \in \mathbb{R}^3$, existe $(-x) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x + (-x) = 0$. Escríbase $-x = (-x_1, -x_2, -x_3) \in \mathbb{R}^3$ Por lo tanto

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) \\ &= (0, 0, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. Se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \lambda(x_3 + y_3)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \lambda x_3 + \lambda y_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3) \\ &= \lambda x + \lambda y \end{aligned}$$

6. Se tiene propiedad distributiva

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)x &= ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, (\lambda + \mu)x_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \lambda x_3 + \mu x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) \\ &= \lambda x + \mu x \end{aligned}$$

7. se tiene que

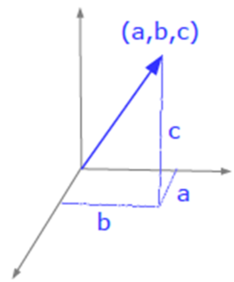
$$\begin{aligned} (\lambda\mu)x &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, (\lambda\mu)x_3) \\ &= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \lambda(\mu x_3)) \\ &= \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) \\ &= \lambda(\mu x) \end{aligned}$$

8. se tiene

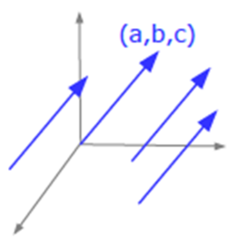
$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= x \end{aligned}$$

Esto demuestra entonces que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial.

Los vectores en $\mathbb{R}^3$ son tercias de números reales (a, b, c). Los vectores en $\mathbb{R}^3$ se pueden visualizar como flechas en el espacio euclidiano.



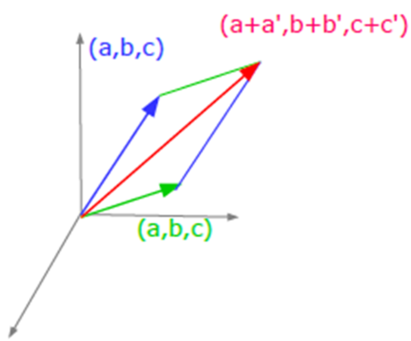
Los vectores pueden representar muchas cosas distintas, como puntos, desplazamientos, velocidades, fuerzas y muchas cosas mas.



Para las aplicaciones podemos pensar que dos flechas que tienen la misma dirección y el mismo tamaño corresponden al mismo vector, sin importar donde estén colocadas.

Suma de vectores Dados dos elementos (a, b, c), $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

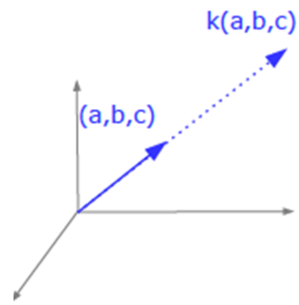
$$(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$$



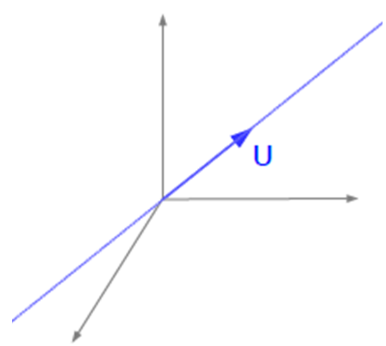
Geométricamente la suma se obtiene poniendo una flecha donde termina la otra, y dibujando la flecha que va del principio de la primera a la punta de la segunda (esto es así porque el desplazamiento resultante en cada dirección es la suma de los desplazamientos).

Producto de un escalar por un vector Dado un elementos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ y un escalar $k \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$k(a, b, c) = (ka, kb, kc)$$



Geométricamente, el producto por el escalar k corresponde a estirar o encoger el vector U por un factor k sin cambiar su dirección si $k > 0$, o a estirarlo o encogerlo y voltearlo si $k < 0$.
En física los desplazamientos, las velocidades y las fuerzas se suman como vectores.



Diremos que 2 vectores tienen la misma dirección si uno es múltiplo escalar del otro.
(a, b, c) y (a', b', c') tienen la misma dirección si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $a' = ra$, $b' = rb$, $c' = rc$, y esto ocurre si y solo si $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$.
Observar que los múltiplos escalares de un vector U (basados en un punto) forman una recta.