Ejemplos de Espacios Vectoriales $\mathbb{R}^n$

Ejemplo $\mathbb{R}^n$

El conjunto de vectores en este espacio es el conjunto de n-adas ordenadas de números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}$$

Al vector $((x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se le denotará simplemente como x. Es decir se escribirá $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. A los números $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n$ se les llama coordenadas del vector x. Similarmente se escribirá $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ etc., para denotar a los vectores en este espacio.

En $\mathbb{R}^n$ se define la suma de los vectores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ coordenada a coordenada, es decir $x + y$ es el vector en $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son las correspondientes sumas de coordenadas de x y y. O sea

$$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Similarmente el producto del vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se define coordenada a coordenada, o sea,

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Vamos a verificar que dicho conjunto satisface las propiedades de espacio vectorial.

1. La suma es conmutativa

$$\begin{aligned} x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n) \\ &= y + x \end{aligned}$$

2. La suma es asociativa

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)] \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n] \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

3. Existe el cero en $\mathbb{R}^n$. Escríbase $0 \in \mathbb{R}^n$ como $0 = (0, \ldots, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} x + 0 &= (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) \\ &= (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= x \end{aligned}$$

4. Para $x \in \mathbb{R}^n$, existe $(-x) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + (-x) = 0$. Escríbase $-x = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$
   Por lo tanto
$$\begin{aligned} x + (-x) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, \ldots, x_n - x_n) \\ &= (0, \ldots, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. Se tiene que
$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) + ((\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)) \\ &= \lambda x + \lambda y \end{aligned}$$

6. Se tiene propiedad distributiva
$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)x &= ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, \ldots, (\lambda + \mu)x_n) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2 \ldots, \lambda x_n + \mu x_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n) \\ &= \lambda x + \mu x \end{aligned}$$

7. se tiene que
$$\begin{aligned} (\lambda\mu)x &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, \ldots, (\lambda\mu)x_n) \\ &= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2) \ldots, \lambda(\mu x_n)) \\ &= \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n) \\ &= \lambda(\mu x) \end{aligned}$$

8. se tiene
$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \ldots, 1 \cdot x_n) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= x \end{aligned}$$

   Esto demuestra entonces que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.