Espacios Vectoriales

Definición 1. *un espacio vectorial es un conjunto no vacío V en el cual están definidas dos operaciones*

a) $+ : V \times V \to V,\ (v_1, v_2) \to\ v_1 + v_2$

b) $\cdot ; \mathbb{R} \to V,\ (\lambda, v_1) = \lambda v_1$

llamadas suma y producto por escalares (respectivamente)

y las cuales satisfacen los siguientes axiomas:

1. $u + v = v + u,\ \forall\ u, v \in V$ (la suma es conmutativa)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w,\ \forall\ u, v, w \in V$ (la suma es asociativa)
3. Existe un elemento $0 \in V$, llamado cero, con la propiedad
$$u + 0 = 0 + u = 0\ \forall\ u \in V$$
4. Para cada elemento $v \in V$, existe un elemento $(-v) \in V$, llamado el inverso aditivo de v con la propiedad
$$v + (-v) = 0$$
5. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ u, v \in V$
6. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in V$
7. $(\lambda \cdot \mu)v = \lambda(\mu \cdot v),\ \forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \forall\ v \in V$
8. $1 \cdot v,\ \forall\ v \in V$

A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores y a los números reales se les llamara escalares. Algunas propiedades que se satisfacen en un espacio vectorial.

1. En un espacio vectorial solamente puede existir un cero. Esto puede verificarse suponiendo que existen dos ceros en V, 0 y $0'$. Entonces
$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$
2. En un espacio vectorial el inverso aditivo de cada elemento es único. Para verificar esto supongamos que $v \in V$ tiene como inversos aditivos a v_1 y v_2. Entonces
$$v_1 = v_1 + 0 = v_1 + (v + v_2) = (v_1 + v) + v_2 = 0 + v_2 = v_2$$

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorial. Entonces*

1. $o \cdot v = 0,\ \forall\ v \in V$

2. $(-1)v = -v,\ \forall\ v \in V$

3. $\lambda \cdot 0 = 0, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$

4. $-(-v) = v, \ \forall \ v \in V$

5. $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \ v \in V$

6. $(-\lambda)(-v) = \lambda v, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \ v \in V$

7. $u + w = v + w \ \Rightarrow \ u = v, \ \forall \ u, v, w \in V$

8. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *y* $\lambda \neq 0$, $\lambda u = \lambda v \ \Rightarrow \ u = v, \ \forall \ u, v \in V$

9. *Si* $\lambda v = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 0$ *o* $v = 0$

Demostración. La justificación de cada paso realizado se basa en alguno (o algunos) de los axiomas que definen un espacio vectorial, o bien en alguno de los resultados previamente demostrado:

1. $v + 0 \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = (1 + 0)v = 1 \cdot v = v$
   Entonces por unicidad del cero $0 \cdot v = 0$

2. $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$
   Entonces por unicidad del inverso aditivo $(-1)v = -v$

3. $\lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 + 0 \ \Rightarrow \ \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 + 0$

$$\therefore \ \lambda \cdot 0 = 0$$

4. $v + (-v) = (-v) + v = 0$ y también $(-v) + (-(-v)) = 0$ Entonces por unicidad del inverso aditivo, $-(-v) = v$

5. En este caso

$$\begin{aligned} (-\lambda)v = ((-1)\lambda)v &= (-1)(\lambda v) - \lambda v \\ &= (\lambda(-1))v = \lambda((-1)v) = \lambda(-v) \end{aligned}$$

6. $(-\lambda)(-v) = (-\lambda)((-1)v) = ((-\lambda)(-1))v = \lambda v$

7. $u + v = v + w \ \Rightarrow \ u + w + (-w) = v + w + (-w) \ \Rightarrow \ u + 0 = v + 0 \ \Rightarrow \ u = v$

8. $\lambda u = \lambda v \ \Rightarrow \ \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}(\lambda v) \ \Rightarrow \ (\lambda^{-1}\lambda)u = (\lambda^{-1}\lambda)v \ \Rightarrow \ 1u = 1v \ \Rightarrow \ u = v$

9. Supóngase que $\lambda \neq 0$. Entonces

$$\lambda v = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}0 = 0 \ \Rightarrow \ (\lambda^{-1}\lambda)v = 0 \ \Rightarrow \ 1v = 0 \ \Rightarrow \ v = 0$$

□

Ejemplo Sea $F(I)$ el conjunto de todas las funciones reales definidas en el subconjunto I de la recta real. Es decir

$$F(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$$

Sean $f,\ g$ dos funciones de $F(I)$. Defínase la suma de f y g como la función $f + g : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

el valor de la función $f + g$ en el punto $x \in I$, es la suma de los valores de las funciones f y g en ese punto.
Si $f \in F(I)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, defínase el producto de f por el escalar λ como la función $\lambda f : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

El valor de la función λf en el punto $x \in I$, es el producto de λ por el valor de f en x.
Ahora se verificará que el conjunto $F(I)$ con estas operaciones de suma y producto por escalares es un espacio vectorial.
Sean $f,\ g,\ h \in F(I)$ y $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

1. La suma es conmutativa. Sea $x \in I$. Entonces

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

como $(f + g)(x) = (g + f)(x)\ \forall\ x \in I$, concluimos que $f + g = g + f$ (es decir la función $f + g$ es igual a la función $g + f$)

2. La suma es asociativa. Sea $x \in I$. Entonces

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x))\\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x)\\ &= ((f + g) + h)(x)\end{aligned}$$

Nuevamente, como $x \in I$ fue arbitrario, se concluye que

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

3. Considérese la función $=: I \to \mathbb{R}$, definida por $0(x) = 0$, $\forall x \in I$.
Obsérvese que para $x \in I$

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

Es decir, $f + 0 = f$. La función 0 es el cero de este espacio vectorial.

4. Dada $f \in F(I)$, defina la función $(-f) : I \to \mathbb{R}$ como $(-f)(x) = -f(x)$. Entonces, para $x \in I$

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$$

O sea, $f + (-f) = 0$, y entonces $(-f)$ es el inverso aditivo de f.

5. Para $x \in I$ se tiene

$$\begin{aligned}(\lambda(f+g))(x) &= \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)\\ &= (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)\end{aligned}$$

   Es decir $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

6. Si $x \in I$

$$((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = ((\lambda f) + (\mu f))(x)$$

   O sea $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$

7. Si $x \in I$

$$\begin{aligned}((\lambda\mu)f)(x) &= (\lambda\mu)f(x) = \lambda(\mu f(x))\\ &= \lambda((\mu f)(x)) = (\lambda(\mu f))(x)\end{aligned}$$

   en donde $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$

8. Para $x \in I$,

$$(1\cdot f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x)$$

   es decir, $1\cdot f = f$.

Esto demuestra, entonces que $F(I)$ es un espacio vectorial.