Conjuntos

En matemáticas un *axioma* es una afirmación que se acepta como verdadera sin que se tenga que justificar. De hecho, es una afirmación que se considera evidente.
No obstante, esto es muy relativo, ya que lo que puede ser evidente para alguna persona puede no serlo para otra.
El término conjunto lo consideramos un concepto primitivo no definido (podemos pensarlo como un agregado o familia de objetos, etc.; sin embargo, los términos agregado, familia, etc., son de alguna forma sinónimos del término conjunto); al pensar en un conjunto pensaremos en los miembros que lo constituyen, de tal forma que desde el inicio hay una relación
Un conjunto es una colección de objetos, donde debe quedar claro cuándo un objeto es miembro del conjunto y cuándo no. A los objetos que forman parte de un conjunto los llamaremos sus elementos. Así pues para dar un conjunto debemos decir quiénes son exactamente todos sus elementos y, así, dado cualquier objeto podemos decidir si es o no un elemento del conjunto.

Notación Para expresar que un objeto es elemento del conjunto usaremos el símbolo $\in$.
Escribiremos $x \in A$ para expresar

$$x \textit{ es elemento de } A \textit{ o } x \textit{ es miembro de } A \textit{ o también } x \textit{ pertenece a } A$$

A $\in$ se le conoce como el símbolo de pertenencia.
De igual manera usaremos $\notin$ para expresar la negación de la pertenencia (la no pertenencia) esto es, escribiremos, $x \notin A$ para expresar

$$x \textit{ no es elemento de } A \textit{ o } x \textit{ no es miembro de } A \textit{ o también } x \textit{ no pertenece a } A$$

Usando el lenguaje lógico, $a \notin b$ en realidad es una abreviatura de la fórmula

$$\neg(a \in b)$$

Para dar un conjunto debemos expresar de alguna manera quiénes son los elementos que lo determinan y esto se puede hacer de la siguiente forma

a) Dando una lista posible de todos los elementos del conjunto, cuando esto sea posible, lo que generalmente se puede hacer cuando la lista es pequeña, o cuando dados algunos de sus elementos y usando puntos suspensivos se entiende sin duda alguna cuáles son los demás elementos.

b) Dando una propiedad (proposición) que resulte verdadera solamente para los elementos del conjunto y que sea falsa para los objetos que no pertenecen a él.

Lo anterior es conocido como *Axioma de separación* también llamado *Axioma de comprensión* o *Axioma de especificación*. Este axioma afirma que si a es un conjunto y P es una propiedad entonces la colección de los elementos de a que cumplen con la propiedad P forman un conjunto. A este conjunto se le denota

$$\{x \in a \mid P(x)\}$$

Ejemplo Si $a_1, a_2, ..., a_n$ son todos los objetos del conjunto A, escribimos

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

y a esta forma de dar un conjunto se le llama por extensión

Ejemplo En el caso en que los elementos del conjunto A estén descritos por una proposición $p(x)$, escribiremos

$$A = \{x \mid p(x)\ es\ verdadera\}$$

esto significa que un objeto a pertenece al conjunto A si y sólo si $p(a)$ es verdadera. De esta manera, si $p(b)$ es falsa, entonces podemos afirmar que $b \notin A$.

Ejemplo Algunos conjuntos

a) $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales

b) $\mathbb{Q}$ representa el conjunto de los números racionales

c) $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de los números enteros

d) El conjunto vacío, denotado por $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos, es decir, $\emptyset = \{\}$. El axioma que enuncia la existencia de dicho conjunto es el Axioma del Vacio que afirma que. Existe un conjunto que carece de elementos.

Definición 1. *Dos conjuntos A y B son iguales (A=B) si ambos tienen exactamente los mismos elementos, es decir, $A = B$ si y sólo si son verdaderas las proposiciones*

$$si\ x \in A,\ entonces\ x \in B\ \ y\ \ x \in B,\ entonces\ x \in A$$

Usando conectivos lógicos, la definición de igualdad se expresa:

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, x\ (x \in A\ \Leftrightarrow\ x \in B)$$

Lo anterior es conocido como el Axioma de Extensionalidad.
Para mostrar que dos conjuntos dados no son iguales se expresa

$$A \neq B\ \Leftrightarrow\ \exists\, x\ [(x \in A\ \wedge\ x \notin\ B)]\ \vee\ (x \in B \wedge x \notin A)$$

Definición 2. *Dados dos conjuntos A y B, diremos que A es un subconjunto de B y lo denotaremos por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es también elemento de B.*

$$A \subseteq B\ \overset{def}{\Leftrightarrow}\ \forall\, x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Evidentemente si $A = B$, entonces $A \subseteq B$, así que en el caso en que $A \subseteq B$ y $A \neq B$, diremos que A es un subconjunto propio de B y lo denotaremos por $A \subsetneq B$

$$A \subsetneq B\ \Leftrightarrow\ \exists\, x\ (x \in A\ \wedge\ x \notin B)$$

Para mostrar que $\nsubseteq B$ es suficiente exhibir un elemento de A que no sea elemento de B.

Teorema 1. *Dos conjuntos son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

Teorema 2. *Sean A y B conjuntos arbitrarios. Entonces*

a) $\emptyset \subseteq A$.

b) $A \subseteq A$

c) Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

Demostración. a) Si $\emptyset \nsubseteq A$, entonces deberíamos poder exhibir un elemento en $\emptyset$ que no pertenece a A, lo cual es imposible ya que $\emptyset$ no tiene elementos. Por lo tanto debe ser $\emptyset \nsubseteq A$. Esta demostración es consecuencia directa de que el antecedente en el condicional de lo que se quería probar es falso. A este tipo de demostración se les denomina demostraciones por vacuidad.

b) Dado que todo elemento de A pertenece a A entonces $A \subseteq A$

c) Sea $x \in A$. Como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$ y como $B \subseteq C$, entonces $x \in C$. Por lo tanto $A \subseteq C$

□

En particular, Si A es el conjunto vacio, tenemos que $\emptyset \subseteq \emptyset$. Sin embargo, debe ser claro que $\emptyset \notin \emptyset$, pues el vacio no tiene elementos, así la contensión y la pertenencia son conceptos que no son equivalentes.

Ejemplo Sea $D = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, tenemos entonces que

- $\emptyset \notin D$, pues $\emptyset$ es distinto de $\{\emptyset\}$ y de $\{\{\emptyset\}\}$, ya que ambos tienen un elemento;
- $\emptyset \subseteq D$, pues $\emptyset$ es un subconjunto de todo conjunto, en particular de D;
- $\{\emptyset\} \in D$;
- $\{\emptyset\} \nsubseteq$, pues su único elemento, $\emptyset$, no es un elemento de D;
- $\{\{\emptyset\}\} \in D$;
- $\{\{\emptyset\}\} \subseteq D$, pues su único elemento, $\{\emptyset\}$, es un elemento de D;
- $\{\{\{\emptyset\}\}\} \notin D$, pues $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ es distinto de $\{\emptyset\}$ y de $\{\{\emptyset\}\}$; y
- $\{\{\{\emptyset\}\}\} \subseteq D$, pues su único elemento, $\{\{\emptyset\}\}$, es un elemento de D.

Definición 3. *Si A es un subconjunto de B, pero no es igual a B, escribimos $A \subsetneqq B$ y decimos que A esta contenido propiamente en B.*

En el caso de que A este contenido propiamente en B, como $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se tiene que $B \nsubseteq A$. Así, como $B \nsubseteq A$ es equivalente a que

$$\neg(\forall\ y(y \in B \Rightarrow y \in A))$$

que es a su vez equivalente a

$$\exists y(y \in B \wedge y \notin A)$$

$A \subsetneqq B$ es la abreviatura de

$$(\forall\ x(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \exists y(y \in B \wedge y \notin A))$$

Esto es, $A \subsetneqq B$ significa que todo elemento de A es un elemento de B pero existe un elemento de B que no es elemento de A.

Ejemplo En el caso de los intervalos de números reales, los siguientes conjuntos cumplían que

$$(0,1) \subseteq [0,1) \subseteq [0,1]$$

y que

$$[0,1] \nsubseteq [0,1) \nsubseteq (0,1)$$

Así, podemos concluir que

$$(0,1) \subsetneqq [0,1) \subsetneqq [0,1]$$

Teorema 3. *La contención tiene las siguientes propiedades*

I) *Reflexiva. Todo conjunto está contenido en si mismo, es decir, para cualquier conjunto A se tiene que $A \subseteq A$*

II) *Transitividad. Si A, B y C son conjuntos cualesquiera tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.*

III) *Antisimetría. Si A y B son conjuntos cualesquiera tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.*

Demostración. Tenemos que

I) Sea A un conjunto cualquiera. Debemos mostrar que

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A)$$

pero siempre que algún x haga verdadero el antecedente, hace trivialmente verdadero el consecuente. por lo tanto, $A \subseteq A$ y esto es cierto para cualquier conjunto A.

II) Sea $x \in A$ como $A \subseteq B$ entonces $x \in B$ y como $B \subseteq C$ entonces $x \in C$ por tanto $A \subseteq C$ $\forall x \in A$

III) Sean A y B cualesquiera conjuntos, tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces por el axioma de extensionalidad $A = B$

$\square$

Teorema 4. *El conjunto vacio tiene las siguientes propiedades*

I) *El conjunto vacío esta contenido en cualquier conjunto*

II) *El conjunto vacío es único*

III) *Sea A cualquier conjunto. Si $A \subseteq \emptyset$, entonces $A = \emptyset$*

Demostración. Tenemos que

I) Ya demostrada

II) Supongamos que existe un conjunto $\emptyset'$, se tiene entonces que

$$\emptyset' \subseteq \emptyset \quad y \quad \emptyset \subseteq \emptyset'$$

por lo tanto $\emptyset' = \emptyset$

III) Queremos demostrar que $\forall\ A(A \subseteq \emptyset \ \Rightarrow \ A = \emptyset)$.
Entonces sea A cualquier conjunto que cumpla el antecedente, es decir, tal que $A \subseteq \emptyset$. Debemos mostrar que $A = \emptyset$.
Por el inciso (i), sabemos que $\emptyset A$, y, por hipótesis, $A \subset \emptyset$. Así, por el Axioma de Extensionalidad, tenemos que

$$\forall A(A \subseteq \emptyset \ \Rightarrow \ A = \emptyset)$$

$\square$