Conjuntos (parte 2)

Conjunto universal Cuando se habla de conjuntos específicos, generalmente se fija un conjunto universal. Este conjunto universal esta formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés.

Considerar que la colección de todos los conjuntos es un conjunto lleva a contradicciones.

Si la colección de todos los conjuntos V es un conjunto, entonces, por el Axioma de separación, la colección

$$\{x \in V \mid x \notin x\}$$

es un conjunto, llamemosle w. Sin embargo, obtendríamos que

$$w \in w \;\Leftrightarrow\; w \notin w$$

pues $w \in V$ dado que V es la colección de todos los conjuntos. Esto contradice el hecho de que una aseveración es cierta o su negación es cierta, y sólo una de ellas lo es. Concluimos que la colección V de todos los conjuntos no puede ser un conjunto.

Así el universo absoluto no lo tratamos como conjunto sino sólo como una colección de cuya totalidad no podemos hablar,vaunque sí podemos hablar de pedazos suficientemente manejables y éstos son los conjuntos universales.

El axioma de separación nos describe una manera de determinar conjuntos precisamente usando un conjunto ya dado. Podemos pensar que este conjunto es justamente un conjunto universal, digamos U. Así, consideramos los conjuntos A construidos como

$$A = \{X \in U \mid P(X)\}$$

donde U es un conjunto universal y $P(X)$ es una propiedad que pueden o no cumplir los elementos de U. Así

$$a \in A \text{ si y sólo si } a \in U, \text{ y } P(a) \text{ es verdadero, y}$$
$$a \notin A \text{ si y sólo si } a \notin U, \text{ y } P(a) \text{ es falso}$$

Conjunto Potencia

Definición 1. *El conjunto potencia de un conjunto A, denotado $P(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Se escribe*

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Nótese que todos los elementos de $P(X)$ son conjuntos.

Ejemplo $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Ejemplo Si $X = \{a\}$, $P(X) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, X\}$

Ejemplo Si $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}, \{a, b\}, X\}$

Como para cada subconjunto X, $\emptyset \subseteq X$, entonces $P(X) \neq \emptyset$ tendrá por lo menos dos elementos que son $\emptyset$ y X

Complemento de un conjunto

Definición 2. *Sea A un subconjunto de un conjunto universal U. El conjunto* ***complemento*** *de A con respecto a U es el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A, y es denotado por A^c. Es decir*

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Observación: *Cada vez que denotemos A^c debe ser claro con respecto a qué conjunto universal U se está realizando la operación complemento, pues*

$$x \in A^c \ \ \textit{si y sólo si}\ x \in U \wedge x \notin A$$

Ejemplo Sea p el conjunto de los naturales pares, es decir,

$$p = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists\ k \in \mathbb{N}\ (x = 2k)\}$$

Si consideramosque el conjunto universal U es $\mathbb{N}$, entonces

$$p^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin p\}$$

Usando la simbología de la lógica

$$p^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin \mathbb{N} \vee \neg\exists\ k \in \mathbb{N}\ (x = 2k)\}$$

es decir, x no es natural o no existe k natural de modo $x = 2k$ y, usando que cuando $x \in \mathbb{N}$, no se puede dar que $x \notin \mathbb{N}$, concluimos que

$$p^c = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall\ k \in \mathbb{N}\ (x = 2k + 1)\}$$

es decir p^c consiste de los naturales que no se pueden expresar de la forma $2k$ con k un natural

Teorema 1. *Sea U un conjunto universal. Entonces la operación complementación tiene las siguientes propiedades*

I) *El complemento del vacío con respecto a U es U, es decir, $\emptyset^c = U$.*

II) *Para todo conjunto $A \subseteq U$, $(A^c)^c = A$.*

III) *El complemento de U con respecto a U es el vacío, es decir, $U^c = \emptyset$*

IV) *Sean A y B subconjuntos cualesquiera de U. Entonces*

$$A \subseteq B \ \ \textit{si y sólo si}\ B^c \subseteq A^c$$

V) *Sean A y B subconjuntos cualesquiera de U. Entonces*

$$A = B \ \ \textit{si y sólo si}\ B^c = A^c$$

Demostración. Tenemos que

I) Para ver que $\emptyset^c = U$, primero veamos que $U \subseteq \emptyset^c$.
Tomemos $x \in U$. Como $x \notin \emptyset$, pues el vacío no tiene elementos, se tiene que $x \in U$ y $x \notin \emptyset$, es decir, $x \in \emptyset^c$. Por lo tanto $U \subseteq \emptyset^c$.
Por otro lado, por la definición
$$\emptyset^c = \{x \in U \mid x \notin \emptyset\}$$
por lo que todos los elementos de $\emptyset^c$ cumplen con ser elementos de U. Así, $\emptyset^c \subseteq U$.
Por lo tanto $\emptyset^c = U$

II) Sea A un subconjunto cualquiera de U. Para ver que $(A^c)^c = A$, primero veamos que $(A^c)^c \subseteq A$.
Sea $x \in (A^c)^c$, entonces $x \in U$ y $x \notin A^c$. Sabemos que
$$y \in A^c \quad \textit{si y sólo si } y \in U \wedge y \notin A$$
por lo que
$$y \notin A^c \quad \textit{si y sólo si } y \notin U \vee y \in A$$
como $x \notin A^c$, tenemos que $x \notin U$ o $x \in A$. Pero si tenemos que $x \in U$, por lo que $x \in A$. Así, $(A^c)^c \subseteq A$.
ahora veamos que $A \supseteq (A^c)^c$. Sea $x \in A$ como $A \subseteq U$, $x \in U$. Por otro lado, como $x \in A$, no es cierto que $x \notin A$, por lo que $x \notin A^c$, y así $x \in U$ y $x \notin A^c$.
Por lo tanto $x \in (A^c)^c$ y $A \subseteq (A^c)^c$.
Por lo tanto
$$(A^c)^c = A$$

III) Por el inciso (i), sabemos que $\emptyset^c = U$, entonces $(\emptyset^c)^c = U^c$. Por el inciso (ii), $(\emptyset^c)^c = \emptyset$, por lo que $\emptyset = U^c$. Concluimos que el complemento de U con respecto a U es efectivamente el vacío

IV) ejercicio

V) ejercicio

□