Función Suprayectiva

Sea una función $f: A \to B$. Si ocurre que todo elemento del codominio (B) es imagen de algún elemento del dominio (A), la función se llama suprayectiva, sobreyectiva

Definición 1. *Una función $f: A \to B$ se dice que es suprayectiva si:*

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad tal \quad que \quad y = f(x)$$

En el caso de la sobreyactividad, el conjunto de las imagenes se identifica con el codominio (B) de la función, es decir debido a que para cualquier función $f: X \to Y$ siempre se tiene que $Im_f \subseteq Y$, para que la función $f: X \to Y$ sea suprayectiva bastará ver que $Y \subseteq Im_f$.
Ahora bien, ´para mostrar que una función $f: X \to Y$ no es suprayectiva, basta exhibir un elemento $y \in Y$ tal que $f(x) \neq y$ para toda $x \in X$.

Ejemplo Sea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall\ y \in \mathbb{Z}\ \Rightarrow\ y = f(x)\ \Rightarrow\ y = -x + 1\ p\ a\ x \in \mathbb{Z}\ \Rightarrow\ x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1-y) = -(1-y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$y \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \frac{y}{2} = x$$

$\therefore$

$$f(x) = f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\left(\frac{y}{2}\right) = y$$

por lo tanto f es suprayectiva,

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ es una función suprayectiva pues dado $b \in\ B$ tenemos que $f(a) = b$ por tanto $2a + 1 = b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b-1}{2} \qquad \therefore\ f(a) = f(\frac{b-1}{2}) = 2(\frac{b-1}{2}) + 1 = b$

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es también una función suprayetiva pues si $b \in\ B$ entonces $f(a) = b \qquad \therefore\ a^3 = b \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{b}$ y $f(a) = f(\sqrt[3]{b}) = (\sqrt[3]{b})^3 = b$

Ejemplo Sea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x^2$ no es suprayectiva ya que, por ejemplo, $3 \in \mathbb{N}$ y no existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x^2 = 3$ (3 no es el cuadrado de ningún número). Aquí $Im_f = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$

Ejemplo Sea $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x + 1$ no es suprayectiva ya que, por ejemplo, $0 \in \mathbb{Z}$ y no existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x + 1 = 0$. Aquí $Im_f = \{1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N} - \{0\}$

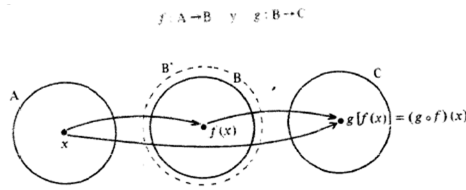
Ejemplo Sea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x + 1$ es suprayectiva. Para cualquier $y \in \mathbb{Z}$, debemos exhibir $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1 = y$. Si consideramos $x = y - 1$, que sabemos es un entero, tenemos que

$$f(x) = f(y-1) = (y-1) + 1 = y$$

Por lo tanto $Im_f = \mathbb{Z}$

Composición de funciones

Definición 2. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. La* **composición** *de f con g es la función $h : A \to C$ dada por $h(x) = g(f(x))$, para cada $a \in A$. A esta función h la denotamos por $g \circ f$.*



Composición de funciones inyectivas

Teorema 1. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva*

Demostración. sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ se tiene entonces que

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

como g es inyectiva se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva entonces $x_1 = x_2$ $\therefore$ $g \circ f$ es inyectiva $\square$

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones suprayectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva*

Demostración. Hay que probar que $\forall z \in C$ $\exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$, se tiene que por ser $g : B \to C$ sobre $\exists y \in B$ tal que $\forall z \in C$ $g(y) = z$ dado que f es suprayectiva y $y \in B$ $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ por lo tanto $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Por lo tanto dado $z \in C$ $\exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$ $\square$

Teorema 3. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es inyectiva entonces f es inyectiva*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ aplicando g se obtiene $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ por ser $g \circ f$ inyectiva se tiene $x_1 = x_2$ en consecuencia f es inyectiva $\square$

Teorema 4. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva entonces g es suprayectiva*

Demostración. Sea $c \in C$ como $g \circ f$ es suprayectiva, existe α tal que

$$c = g \circ f(\alpha) = g(f(\alpha))$$

esto prueba que $c \in Im_g$ $\square$