Propiedades de la Composición de Funciones

Propiedad Asociativa Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ entonces $h : A \to D$. Entonces se verfica

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Comprobación Tenemos que

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

por otra parte

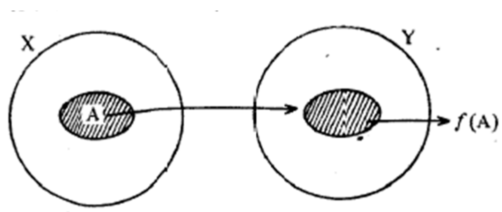
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

por lo tanto

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Imagenes de subconjuntos del dominio de funciones

Sean $f : X \to Y$ y $A \subseteq X$. Las imagenes de todos los elementos de A determinan un subconjunto de Y llamado imagen de A por f.



Definición 1. *La imagen del subconjunto $A \subseteq Y$ es el conjunto cuyos elementos son las imagenes de los elementos de A.*

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

también

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists a \in A \wedge f(x) = y\}$$

De acuerdo con la definición

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists\, x \in A \ni y = f(x)$$

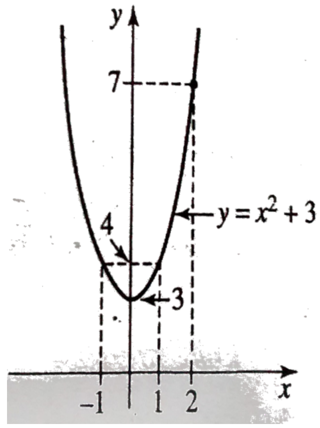
En particular, si $A = X$, entonces $f(X)$ se llama imagen del dominio por f o directamente imagen de f.

Ejemplo Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 + 3$$

Sea $A = [-1, 2]$, en este caso se tiene que

$$f([-1, 2]) = [3, 7]$$



Propiedades de la Imagen

Proposición 1. *a) Si $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset X$ y si $A \subset B$ entonces $f(A) \subset f(B)$*

Demostración. Sea $z \in f(a) \Rightarrow \exists x \in A$ tal que $f(x) = z \Rightarrow \exists x \in B$ tal que $f(x) = z$ $A \subset B \Rightarrow z \in f(B)$ $\therefore f(A) \subset f(B)$ □

Proposición 2. *a) Si $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset X$ se tiene entonces que $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$*

Demostración. Sea $z \in f(A \bigcup B) \Rightarrow \exists x \in A \bigcup B$ tal que $f(x) = z \Rightarrow \exists x \in B \quad ó \quad x \in A$ tal que $f(x) = z$ $\Rightarrow \exists x \in B \quad y \quad f(x) = z$ ó $\exists x \in A \quad y \quad f(x) = z \therefore z \in f(B)$ ó $z \in f(A) \Rightarrow z \in f(a) \bigcup f(B) \therefore f(A \bigcup B) \subset f(A) \bigcup f(B)$
Por otro lado

$$A \subset A \bigcup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \bigcup B)$$

$$B \subset A \bigcup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \bigcup B)$$

$$\Rightarrow f(A) \bigcup f(B) \subset f(A \bigcup B)$$

□

Proposición 3. *a) Si $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset X$ se tiene entonces que $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$*

Demostración. Sea $z \in f(A \bigcap B) \Rightarrow \exists x \in A \bigcap B$ tal que $f(x) = z \Rightarrow \exists x \in B \quad y \quad x \in A$ tal que $f(x) = z$ $\Rightarrow \exists x \in B \quad y \quad f(x) = z$ y $\exists x \in A \quad y \quad f(x) = z \therefore z \in f(B)$ y $z \in f(A) \Rightarrow z \in f(a) \bigcap f(B) \therefore f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$ □

En el siguiente ejemplo se ilustra $f(A \bigcap B) \neq f(A) \bigcap f(B)$
Sean los conjuntos A,B tal que

$$A = \{-2, -3, 4\} \quad B = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \bigcap B = \{4\} \quad f(A \bigcap B) = \{16\}$$

Por otro lado

$$f(A) \bigcap f(B) = \{4, 9, 16\} \bigcap \{4, 9, 16, 25\} = \{4, 9, 16\}$$

y resulta que

$$f(A \bigcap B) = \{16\} \neq \{4, 9, 16\} = f(A) \bigcap f(B)$$