Caracterización del rango de una matriz por medio del determinante

Lema 1. *El rango de una matriz M de 3×3 es 3 si y solo si* $\det(M) \neq 0$.

Demostración. El rango de la matriz M es menor que 3 si y solo si los renglones (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_1, b_3) y (c_1, c_2, c_3) son linealmente dependientes, es decir, si existen escalares $r, s, t \in \mathbb{R}$ no todos 0, tales que

$$r(a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_1, b_3) + t(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

es decir

1. $ra_1 + sb_1 + tc_1 = 0$
2. $ra_2 + sb_2 + tc_2 = 0$
3. $ra_3 + sb_3 + tc_3 = 0$

Multiplicando (1) y (2) por a_2 y a_1 respectivamente queda

$$ra_1a_2 + sb_1a_2 + tc_1a_2 = 0$$

$$ra_2a_1 + sb_2a_1 + tc_2a_1 = 0$$

y restando queda

$$s(b_1a_2 - b_2a_1) + t(c_1a_2 - c_2a_1) = 0 \tag{1}$$

Multiplicando (1) y (3) por a_3 y a_1 respectivamente queda

$$ra_1a_3 + sb_1a_3 + tc_1a_3 = 0$$

$$ra_3a_1 + sb_3a_1 + tc_3a_1 = 0$$

y restando queda

$$s(b_1a_3 - b_3a_1) + t(c_1a_3 - c_3a_1) = 0 \tag{2}$$

Multiplicando (2) y (3) por a_3 y a_2 respectivamente queda

$$ra_2a_3 + sb_2a_3 + tc_2a_3 = 0$$

$$ra_3a_2 + sb_3a_2 + tc_3a_2 = 0$$

y restando queda

$$s(b_2a_3 - b_3a_2) + t(c_2a_3 - c_3a_2) = 0 \tag{3}$$

Multiplicando (1) por b_3, (2) por b_2 y (3) por b_1 y sumando queda

$$s[b_1a_2b_3 - b_2a_1b_3 + b_1a_3b_2 - b_3a_1b_2 + b_2a_3b_1 - b_3a_2b_1] + t[c_1a_2b_3 - c_2a_1b_3 + c_1a_3b_2 - c_3a_1b_2 + c_2a_3b_1 - c_3a_2b_1] = 0$$

$s[0] + t[\det M] = 0$ asi que $t \det M = 0$ y como $t \neq 0$ entonces $\det M = 0$. □

Lema 2. *El determinante de una matriz M tiene las siguientes propiedades.*

1. *Si todas las entradas de un renglón o una columna de M son 0 el determinante es 0.*

2. *Si se intercambian dos renglones de M el determinante cambia de signo.*

3. *Si se multiplica un renglón de M por un escalar r, el determinante se multiplica por r.*

4. *Si R es un renglón de la matriz M, y $R = R_1 + R_2$, y M_1 y M_2 son las matrices que se obtienen de reemplazar el renglón R por los renglones R_1 y R_2 entonces* $\det M = \det M_1 + \det M_2$.

Demostración. En este caso

1. Si todas las entradas de un renglón o una columna son 0 entonces en cada uno de los productos en el determinante hay un factor 0 asi que todos los productos son 0.

2. Al intercambiar dos renglones los productos que aparecen en el determinante son los mismos, pero la paridad de cada permutación cambia, asi que el signo de cada producto cambia.

3. Al multiplicar un renglón por un escalar r, cada producto en el determinante se multiplica por r.

4. Cada producto del determinante de M tiene un factor en el renglón R, y este es la suma de factor en el renglón R_1 y un factor en el renglón R_2. Así que cada producto de $\det M$ es la suma de un producto en $\det M_1$ y un producto en $\det M_2$.

□

Ejemplo Tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = - \det A$$

Ejemplo En este caso

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \det A$$

Ejemplo En este caso

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Corolario 1. *El determinante también tiene estas propiedades:*

1. *Si una matriz tiene 2 renglones iguales, su determinante es 0.*

2. *Si a un renglón de M le sumamos un múltiplo de otro renglón, el determinante no cambia.*

3. *Si los renglones de M son linealmente dependientes, el determinante de M es 0.*

Demostración. En este caso

a) Por la propiedad 2, al intercambiar dos renglones el signo del determinante cambia, pero por otro lado, al intercambiar dos renglones iguales la matriz no cambia, asi que el determinante no puede cambiar. La única manera de que el signo cambie y no cambie es que sea 0.

b) Si a un renglón de la matriz M le sumamos otro renglón de M, entonces por la propiedad 4 el determinante de la matriz resultante es la suma de los determinantes de la matriz M y de otra matriz que tiene dos renglones iguales, pero por la propiedad (a) esta matriz tiene determinante 0, asi que al sumarle un renglón a otro el determinante no cambia. Lo del múltiplo es tarea.

c) Si los renglones son linealmente dependientes, podemos restarle a un renglón una combinación lineal de los otros para que se haga 0, asi que el determinante se hace 0, y por (b) esta operación no cambia el determinante.

□

Teorema 1. *El rango de una matriz M de $n \times n$ es n si y solo si* $\det M \neq 0$.

Demostración. El rango de M es menor que n si y solo si sus renglones son linealmente dependientes.
Así que si el rango es menor que n la propiedad (c) implica que $\det M = 0$.
Falta ver que $\det M = 0$ Implica que los renglones de M son linealmente dependientes.
Podemos hacer operaciones elementales para llevar la matriz M a una matriz escalonada M'. Por las propiedades 1,2 y (a) de los determinantes, cada operación elemental solo cambia el signo del determinante o lo multiplica por un numero distinto de 0 o no lo afecta, asi que $\det M = r \cdot \det M'$ para algún $r \neq 0$. Pero como M' es una matriz cuadrada escalonada, M' es una matriz triangular, asi que el determinante de M' es el producto de las entradas en la diagonal principal de M'. Por lo tanto $\det M' = 0$ implica que una entrada en la diagonal de M' es 0, y como M' es escalonada todas las entradas en la diagonal abajo de esa son 0, asi que el ultimo renglón es 0, lo que dice que el rango de M', que es igual al rango de M, es menor que n. □

rango de una matriz no cuadrada por determinantes Se le llama submatriz, a una matriz que está contenida dentro de otra matriz. Dentro de una matriz, podemos elegir filas y columnas que formen otra matriz independiente.

Ejemplo En la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

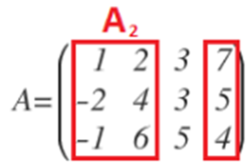
Podemos elegir las siguientes filas y columnas dentro de A:

$$A=\left(\overset{A_1}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{matrix}}}\begin{matrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}\right)$$

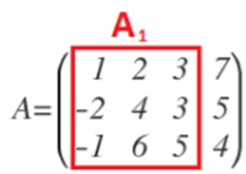
Que forman la siguiente submtariz cuadrada de orden 3:

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

O incluso podemos elegir columnas que no estén seguidas:



Elegimos esta submatriz cuadrada:



y calculamos su determinate

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -8$$

Su resultado es distinto de cero, por tanto, como el orden de esta submatriz es 3, el rango de la matriz A es 3.
Si todos los determinantes de las submatrices de orden 3 fueran igual a cero, tendríamos que seguir con las submatrices de orden 2, hasta encontrar un determinante que fuera distinto de 0 y en ese caso, el rango de la matriz sería 2.

Ejemplo Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Las mayores submatrices cuadradas, contenidas en A, que podemos elegir son de orden 3. Vamos a ir calculando los determinantes de todas las posibles submatrices cuadradas de orden 3, hasta encontrar una cuyo determinante sea distinto de 0.

1. Empezamos eligiendo la submatriz cuadrada formada por las tres primeras columnas:

$$\det \ A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

   Su determinante es cero, por lo que tenemos que seguir buscando.

2. Probamos con la submatriz cuadrada formada por las columnas 2, 3 y 4:

$$\det\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

   Su determinante es cero. Tenemos que seguir buscando.

3. Elegimos la submatriz cuadrada formada por las columnas 1, 2 y 4

$$\det\ A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 7 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

   Su determinante también es cero.

4. Y por último, elegimos la submatriz cuadrada formada por las columnas 1, 3 y 4:

$$\det\ A_4 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

   Que su determinante también es cero.

Ya no quedan más combinaciones de columnas para seguir eligiendo submatrices cuadradas de orden 3. Todas las submatrices cuadradas de orden 3, que están contenidas en A son igual a cero, por tanto, el rango de A, va a ser menor que 3.
Al no encontrar ninguna submatriz cuadrada de orden 3, cuyo determinante sea distinto de cero, vamos a probar con submatrices cuadradas de orden . 2.
Consideramos

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

en este caso

$$\det\ A_5 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13$$

Su resultado es distinto de cero, por tanto el rango de la matriz es 2.