Criterios de existencia de soluciones

Ecuaciones lineales. Una ecuación lineal en n variables es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

La ecuación es **homogénea** si b=0.
Una solución de la ecuación es un vector $(s_1, s_2, s_3, ..., s_n)$ en $\mathbb{R}^n$ formado por valores $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ de las incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ que satisfacen la ecuación.

Lema 1. *Las soluciones de una ecuación homogénea forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión n-1.*

Demostración. Veamos primero que las soluciones forman un subespacio vectorial.
Como

$$a_10 + a_20 + a_30 + ... + a_n0 = 0$$

entonces (0,0,0,...,0) es una solución.
Si

$$a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + ... + a_ns_n = 0$$

entonces

$$a_1\lambda s_1 + a_2\lambda s_2 + a_3\lambda s_3 + ... + a_n\lambda s_n = 0$$

asi que los múltiplos de una solución también son soluciones.
Y si

$$a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + ... + a_ns_n = 0$$

y Si

$$a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3 + ... + a_nt_n = 0$$

entonces

$$a_1(s_1 + t_1) + a_2(s_2 + t_2) + a_3(s_3 + t_3) + ... + a_n(s_n + t_n) = 0$$

asi que la suma de dos soluciones es también una solución.
Asi que las soluciones forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Para ver que su dimensión es n-1, hay que ver que hay n-1 soluciones linealmente independientes y que no hay n soluciones linealmente independientes.
Al menos uno de los coeficientes de la ecuación es distinto de 0. Si $a_1 \neq 0$ entonces hay n-1 soluciones

$$(a_2, -a_1, 0, 0, ..., 0), (a_3, 0, -a_1, 0, ..., 0), (a_4, 0, 0, -a_1, 0, ..., 0), ..., (a_n, 0, 0, ..., 0, -a_1)$$

que son linealmente independientes porque cada una tiene una entrada distinta de 0 $(-a_1)$ en lugar donde las otras tienen 0.
Asi que el espacio de soluciones tiene dimensión al menos n-1. No puede tener dimensión n porque tendría que ser todo $\mathbb{R}^n$, pero hay vectores en $\mathbb{R}^n$ que no son soluciones (como 1,0,0,...,0) si $a_1 \neq 0$. □

Las soluciones de una ecuación no homogénea no forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Pero cada ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

tiene una ecuación lineal homogénea asociada

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$$

Lema 2. *Las soluciones de una ecuación lineal son la suma de una solución particular de la ecuación con las soluciones de la ecuación homogénea asociada.*

Demostración. Basta observar que la suma de una solución de la ecuación lineal con cualquier solución de la ecuación homogénea asociada es una solución de la ecuación lineal y que la diferencia de cualesquiera dos soluciones de la ecuación lineal es una solución de la ecuación homogénea asociada. □

Queremos averiguar cuantas soluciones tiene un sistema de ecuaciones y como encontrarlas todas.

Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales Considérese el sistema homogéneo

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

Obsérvese que este sistema siempre será consistente, pues al menos posee la solución trivial

$$x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$$

Lema 3. *Las soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneas con n incógnitas forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. La intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial. □

Lema 4. *Si un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas tiene soluciones, estas son la suma de una solución particular del sistema con las soluciones del sistema de ecuaciones homogénea asociadas.*

Demostración. Esto es cierto para las soluciones de cada una de las ecuaciones del sistema, asi que es cierto para las soluciones comunes a todas. □

Para saber si un sistema de ecuaciones tiene soluciones y encontrarlas podemos usar matrices.

Ejemplo Considere el sistema homogéneo de 4 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{gathered} 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{gathered}$$

Este sistema tiene la matriz asociada

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Al llevarla a su forma escalonada reducida se obtiene

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De modo que el sistema es equivalente a

$$\begin{gathered} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{gathered}$$

Y el conjunto de soluciones será

$$\{x_i = t, x_2 = 2t, x_3 = t, t \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo Consideremos ahora el sistema

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{gathered}$$

Con la matriz del sistema la llevamos a una forma escalonada reducida y obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

De modo que el sistema

$$\begin{gathered} x_1 - \tfrac{7}{8}x_4 = 0 \\ x_2 + \tfrac{3}{2}x_4 = 0 \\ x_3 + \tfrac{3}{8}x_4 = 0 \end{gathered}$$

es equivalente al original y entonces el conjunto solución es:

$$\left\{x_1 = \frac{7}{8}t, x_2 = -\frac{3}{2}t, x_3 = -\frac{3}{8}t, x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

Teorema 1. *Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones tendrá siempre una infinidad de soluciones*

Demostración. Supóngase que el sistema tiene m ecuaciones y n incognitas. La hipótesis del teorema es que $m < n$. La mteriz del sistema es una matriz rectangular horizontal. Supóngase que, después de llevar esta matriz a su forma escalonada reducida se obtuvieron r líneas no nulas. Es claro que $r \leq m$, y por lo tanto $r < n$. Entonces, existen $k = n - r$ variables que quedan libres en el sistema, esto es, que éste posee una infinidad de soluciones □

La solución de un sistemas no homogéneo de ecuaciones lineales. Considérese el sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

se puede expresar como producto de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y se denota $AX = B$ (A es una matriz $m \times n$).
y se asociará a éste el sistema homogéneo $AX = 0$ (aquí, 0 denota la matriz cero $m \times 1$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y se dirá que este sistema es el sistema homogéneo asociado a $AX = B$. Se dirá que

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{bmatrix}$$

es una solución de $AX = B$ si la matriz $A\widetilde{X}$ es idéntica a la matriz B (se trata del mismo concepto de solución de ecuaciones lineales, escrito con matrices) lo cual se escribirá simplemente como: si $\widetilde{X}$ es solución de $AX = B$ entonces $A\widetilde{X} = B$.

Teorema 2. *Si el sistema $AX = B$ es consistente, entonces la solución general del sistema puede escribirse como la suma de una solución particular del mismo más la solución general del sistema homogéneo asociado $AX = 0$*

Demostración. Supóngase que el sistema $AX = B$ es consistente (su conjunto solución no es vacio). Sea $\widetilde{X_p}$ una solución particular del sistema, y sea $\widetilde{X}$ cualquier otra solución del mismo.
Tenemos entonces

$$A(\widetilde{X} - \widetilde{X_p}) = A\widetilde{X} - A\widetilde{X_p} = B - B = 0$$

entonces $\widetilde{X_h} = \widetilde{X} - \widetilde{X_p}$ es alguna solución del sistema homogéneo asociado $AX = 0$.
Es decir, como $\widetilde{X} = \widetilde{X_p} + \widetilde{X_h}$ cualquier solución del sistema $AX = B$ se escribe como la suma de una solución particular $\widetilde{X_p}$ del mismo, más alguna solución del sistema homogéneo asociado.
Sea ahora $\widetilde{X_h}$ cualquier solución de $AX = 0$. Al escribir $\widetilde{X} = \widetilde{X_p} + \widetilde{X_h}$ se ve que $A\widetilde{X} = B$, esto es, es solución de $AX = B$ □

Ejemplo Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 19 \end{aligned}$$

Al usar eliminación Gaussiana, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 - t \\ x_2 &= -1 + t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
Usando notación matricial

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - t \\ -1 + t \\ t \end{bmatrix}$$

Obsérvese que

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

en donde $x_1 = 7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ es una solución particular del sistema y $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$) es la solución general del sistema homogéneo asociado.

Teorema 3. *La existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas depende de los rangos de las matrices asociada y aumentada*

1. *Si la matriz asociada tiene rango menor que la matriz aumentada, el sistema no tiene soluciones.*
2. *Si la matriz asociada y la matriz aumentada tienen rango n, el sistema tiene exactamente una solución*

3. *Si la matriz asociada y la matriz aumentada tienen rango $r < n$, el sistema tiene por soluciones a los puntos de un subespacio afin de dimensión n-r.*

Demostración. Podemos hacer operaciones elementales para llevar la matriz aumentada a una matriz escalonada, que corresponde a otro sistema de ecuaciones con las mismas soluciones que el sistema original. Al hacer esto la matriz asociada también queda escalonada y los rangos de la matriz asociada y la matriz aumentada no cambian.

1. El rango de la matriz asociada es menor que el rango de la matriz aumentada si y solo si en la matriz escalonada hay un renglón cuyas primeras n entradas son 0 y la ultima entrada es $c \neq 0$. Esto corresponde a una ecuación $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = c$ que no tiene solución

2. La matriz asociada y la matriz aumentada tienen rango n si y solo si en la matriz escalonada hay n renglones distintos de 0. Esta corresponde a un sistema de ecuaciones con las mismas soluciones donde la ultima ecuación es de la forma $a_{n\ n}x_n = d_n$ de donde podemos despejar $x_n = \dfrac{d_n}{a_{n\ n}}$, la penúltima ecuación es de la forma $a_{n-1\ n-1}x_{n-1} + a_{n-1\ n}x_n = d_{n-1}$ de donde podemos despejar a x_{n-1} porque ya conocemos x_n . La ecuación anterior es de la forma

$$a_{n-2\ n-2}x_{n-2} + a_{n-2\ n-1}x_{n-1} + a_{n-2\ n}x_n = d_{n-2}$$

de donde podemos despejar a x_{n-2} porque ya conocemos x_{n-1} y x_n,. Y asi podemos seguir hasta hallar los valores de todas las variables.

3. La matriz asociada y la matriz aumentada tienen rango r si y solo si la matriz escalonada tiene r renglones distintos de 0, que empiezan en r de las primeras n columnas. A las variables corresponden a las otras n-r columnas (donde no empieza ningún escalón) les podemos dar cualquier valor, y nos queda un sistema de r ecuaciones con r incógnitas cuya matriz asociada tiene rango r, que por el inciso anterior tiene solución única.

□

Teorema 4. *Si la matriz M de los coeficientes un sistema de n ecuaciones lineales con n variables tiene determinante distinto de 0, entonces el sistema tiene una solución única, que esta dada por*

$$x_1 = \frac{\det\ M_1}{\det\ M}$$
$$x_2 = \frac{\det\ M_2}{\det\ M}$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_k = \frac{\det\ M_k}{\det\ M}$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_n = \frac{\det\ M_n}{\det\ M}$$

donde M_k es la matriz que se obtiene de M reemplazando la columna de la variable x_k por la columna de los términos constantes del sistema.

Demostración. Como la matriz asociada M tiene rango n, podemos hacer operaciones elementales para convertirla en una matriz M' que tiene entradas distintas de 0 en la diagonal y todas las demás entradas iguales a 0. Podemos hacer esto sin cambiar el determinante de M. Usando las mismas operaciones elementales, la matriz aumentada MA se convierte en una matriz escalonada M'A que tiene entradas distintas de 0 en las entradas a_{kk} y 0 en las demás entradas excepto en la ultima columna que son unas constantes c_k.
El sistema de ecuaciones asociado a la matriz M'A es

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 = c_1 \quad & x_1 = \frac{c_1}{a_{11}} \\ a_{22}x_2 = c_2 \quad & x_2 = \frac{c_2}{a_{22}} \\ \ldots\ldots & \\ a_{kk}x_k = c_k \quad & x_k = \frac{c_k}{a_{kk}} \\ \ldots\ldots & \\ a_{nn}x_n = c_n \quad & x_n = \frac{c_n}{a_{nn}} \end{aligned}$$

cuyas soluciones son las mismas que las soluciones del sistema original.
Como la matriz M' es diagonal su determinante es

$$a_{11}q_{22}...q_{kk}...a_{nn}$$

Y como la matriz M_k' se obtiene de M' reemplazando la columna k por la columna de las constantes c_i, M_k' tiene determinante

$$a_{11}q_{22}...c_k...a_{nn}$$

Asi que $x_k = \dfrac{c_k}{a_{kk}} = \dfrac{\det\ M_k'}{\det\ M'}$.
Como M' y M_k' se obtuvieron de M' y M_k' realizando operaciones elementales que no cambian los determinantes, entonces $x_k = \dfrac{\det\ M_k}{\det\ M}$ □

Ejemplo Encontrar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x + y + 4z = 3 \\ 4x + 5z - y = 2 \end{aligned}$$

Solución En este caso la matriz de coeficientes asociada es

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\det M = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -69$$

Asi que el sistema tiene solución única

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -90$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -41$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Asi que la única solución es:

$$x = \frac{\det M_1}{\det M} = \frac{-90}{-69}$$

$$y = \frac{\det M_2}{\det M} = \frac{-41}{-69}$$

$$z = \frac{\det M_3}{\det M} = \frac{6}{-69}$$