Matriz cuadrada

Las matrices de orden $n \times n$ (que tienen el mismo numero de renglones y columnas) se llaman **matrices cuadradas**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Las matrices cuadradas que solo tienen entradas distintas de 0 en la diagonal principal (es decir, aquellas matrices (a_{ij}) donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se llaman **matrices diagonales**.
Las matrices cuyas entradas debajo de la diagonal son 0

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se llaman **matrices triangulares**.
A cada matriz diagonal M le podemos asociar un numero real llamado el **determinante** de M , que guarda información algebraica y geométrica sobre la matriz.
Matrices de 2×2.
Si

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

el determinante de M, se denota

$$\det M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

y su valor se calcula

$$\det M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Ejemplo Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución En este caso

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = (2)(4) - (5)(3) = -7$$

Observar que si se intercambian los renglones de una matriz de 2×2 el determinante cambia de signo, y si se multiplica un renglón por un escalar λ el determinante se multiplica por λ.
Para la matriz A de 3×3 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Al reescribir esta expresión factorizando los elementos de la primera línea de A se tiene

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Obsérvese que las expresiones entre paréntesis tienen un gran parecido al valor del determinante de una matriz de orden 2.
De hecho

$$coeficiente\ de\ a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$coeficiente\ de\ a_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} = -\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$coeficiente\ de\ a_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Ejemplo Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución En este caso

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (9) + (32) + (-2) - (6) - (4) - (24) = -59$$

Introducimos la notación

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A(1,2)=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A(1,3)=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Entonces (**??**) puede escribirse como

$$\det A = a_{11}\det A(1,1) - a_{12}\det A(1,2) + a_{13}\det A(1,3) \tag{1}$$

Más aún, observese que $A(1,1)$ la matriz cuyo determinante es el coeficiente de a_{11} en $\det A$ es la submatriz que se obtiene de A borrando de ella la primera línea y la primera columna (que es precisamente la línea y la columna a la que pertenece el elemento a_{11}), o sea,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A(1,1) = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Similarmente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A(1,2) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A(1,3) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

La fórmula establece el valor del determinante de A con los elementos de la primera línea A factorizados se llama desarrollo por cofactores del determinante de A respecto de su primera línea.

Ejemplo Si A es la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Se tiene que aplicando la fórmula 1

$$\begin{aligned}
\det A &= 2\ \det\ A(1,1) - 3\ \det\ A(1,2) + 5\ \det\ A(1,3) \\
&= 2\ \det\ \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} - 3\ \det\ \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + 5\ \det\ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \\
&= 2(46) - 3(13) + 5(-18) = -37
\end{aligned}$$

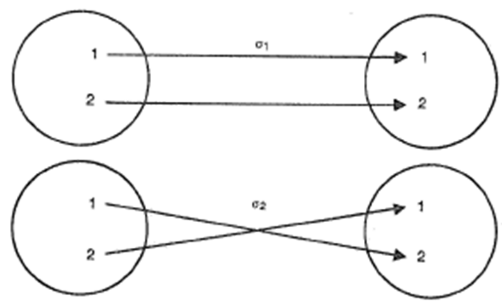
El proceso general se describe a continuación.

Permutaciones

Considérese el conjunto de números $\{1, 2, ..., n\}$. Una permutación de este conjunto no es más que una determinada ordenación de sus elementos.

Definición 1. *Se llama permutación del conjunto $S = \{1, 2, ..., n\}$ a una función biyectiva $\sigma : S \to S$.*

Ejemplo Si $S = \{1, 2\}$ existen dos funciones biyectivas σ_1 y σ_2 de S en si mismo



Sea A la matriz cuadrada de orden 2 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de A, denotado det A, se escribe

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

PERMUTACIONES DEL CONJUNTO $\{1, 2\}$	$sgn\ \sigma$	PRODUCTO ELEMENTAL $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$	$(sgn\ \sigma)\ a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$
(1, 2)	1	$a_{11}\,a_{22}$	$a_{11}\,a_{22}$
(2, 1)	-1	$a_{12}\,a_{21}$	$-a_{12}\,a_{21}$

SUMA $= a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} = det\ A$

Ahora bien dadas las permutaciónes del conjunto $\{1, 2\}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos expresar el determinante de la siguiente forma

$$\det(A) = a_{1\ \sigma_1(1)}a_{2\ \sigma_1(2)} - a_{1\ \sigma_2(1)}a_{2\ \sigma_2(2)}$$

Sea A la matriz cuadrada de orden 3 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El determinante de A, denotado det A, se escribe

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

PERMUTACIONES DEL CONJUNTO $\{1,2,3\}$	$sgn\ \sigma$	PRODUCTO ELEMENTAL $a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}a_{3\,\sigma(3)}$	$(sgn\ \sigma)$ $a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}a_{3\,\sigma(3)}$
$(1,2,3)$	1	$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$	$a_{11}\,a_{12}\,a_{13}$
$(2,3,1)$	1	$a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$	$a_{12}\,a_{22}\,a_{31}$
$(3,1,2)$	1	$a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$	$a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$
$(1,3,2)$	-1	$a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$	$-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$
$(2,1,3)$	-1	$a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$	$-a_{12}\,a_{21}\,a_{32}$
$(3,2,1)$	-1	$a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$	$-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$

Ahora bien dadas las permutaciónes del conjunto $\{1,2,3\}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos expresar el determinante de la siguiente forma

$$\det(A) = a_{1\ \sigma_1(1)}a_{2\ \sigma_1(2)}a_{3\ \sigma_1(3)} - a_{1\ \sigma_2(1)}a_{2\ \sigma_2(2)}a_{3\ \sigma_2(3)} - a_{1\ \sigma_3(1)}a_{2\ \sigma_3(2)}a_{3\ \sigma_3(3)} + a_{1\ \sigma_4(1)}a_{2\ \sigma_4(2)}a_{3\ \sigma_4(3)} +$$
$$a_{1\ \sigma_5(1)}a_{2\ \sigma_5(2)}a_{3\ \sigma_5(3)} - a_{1\ \sigma_6(1)}a_{2\ \sigma_6(2)}a_{3\ \sigma_6(3)}$$

Definición 2. *Sea σ una permutación del conjunto $S = \{1,2,...,n\}$. Se dice que posee una inversión relativa al par de números $i,j \in \{1,2,...,n\}$, si ocurre $i < j$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$.*

Ejemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene una inversión, pues $1 < 2$ y $\sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(2)$.

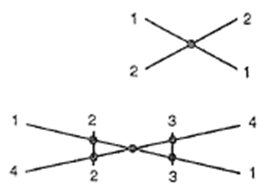
Ejemplo La permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene 5 inversiones

$$\begin{array}{l} 1 < 2 \quad y \quad \sigma(1) = 4 > 2 = \sigma(2) \\ 1 < 3 \quad y \quad \sigma(1) = 4 > 3 = \sigma(3) \\ 1 < 4 \quad y \quad \sigma(1) = 4 > 1 = \sigma(4) \\ 2 < 4 \quad y \quad \sigma(2) = 2 > 1 = \sigma(4) \\ 3 < 4 \quad y \quad \sigma(3) = 3 > 1 = \sigma(4) \end{array}$$

Una manera sencilla de contar las inversiones de una permutación está dada por la siguiente regla: escriba en una línea los elementos del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ y debajo de ella los valores de la permutación $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$. Una con trazos los elementos correspondientes y cuente el número de intersecciones que ocurrieron en los trazos realizados.
Para los ejemplos anteriores se tiene



Definición 3. *Sea σ una permutación del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Sea k_σ = número de inversiones de σ. Si k_σ es par, se dice que la permutación σ es par, caso contrario, se dice que es una permutación impar. Se define el signo de la permutación σ, denotado por sgn σ como*

$$sgn\ \sigma = (-1)^{k_\sigma}$$

Por lo tanto, si σ es una permutación par, $sgn\ \sigma = 1$, caso contrario, si σ e una permutación impar, $sgn\ \sigma = -1$. Se puede entonces definir el determinante de una matriz cuadrada

Determinante de 2×2 de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= a_{1\ \sigma_1(1)}a_{2\ \sigma_1(2)} - a_{1\ \sigma_2(1)}a_{2\ \sigma_2(2)} \\ &= \sum_\sigma (-1)^{k_\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{1\sigma(1)} \end{aligned}$$

Determinante de 3×3 Sea A la matriz cuadrada de orden 3 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{1\ \sigma_1(1)}a_{2\ \sigma_1(2)}a_{3\ \sigma_1(3)} - a_{1\ \sigma_2(1)}a_{2\ \sigma_2(2)}a_{3\ \sigma_2(3)} - a_{1\ \sigma_3(1)}a_{2\ \sigma_3(2)}a_{3\ \sigma_3(3)} + a_{1\ \sigma_4(1)}a_{2\ \sigma_4(2)}a_{3\ \sigma_4(3)} + \\ &\quad a_{1\ \sigma_5(1)}a_{2\ \sigma_5(2)}a_{3\ \sigma_5(3)} - a_{1\ \sigma_6(1)}a_{2\ \sigma_6(2)}a_{3\ \sigma_6(3)} \\ &= \sum_\sigma (-1)^{k_\sigma} a_{1\ \sigma(1)}a_{2\ \sigma(2)}a_{3\ \sigma(3)} \end{aligned}$$

Determinante de $n \times n$ Sea A la matriz cuadrada de orden n siguiente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\det\ (A) = \sum_{\sigma} (-1)^{k_\sigma} a_{1\ \sigma(1)} a_{2\ \sigma(2)} \cdots a_{n\ \sigma(n)}$$