## El espacio de soluciones de un sistemas no homogéneo de ecuaciones lineales

Considérese el sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1}$$

se puede expresar como producto de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y se denota $AX = B$ (A es una matriz $m \times n$).
Podemos asociarle el sistema homogéneo

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \tag{2}$$

que también se puede expresar como producto de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

podemos denotarlo $AX = 0$.
Ahora consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$S = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ es solución de } AX = 0\}$$

Se afirma que S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. En efecto

1. Suponga que $X_1$ y $X_2$ son soluciones del sistema $AX = 0$. Entonces

   $$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$$

   lo que dice que $X_1 + X_2$ es también solución

2. Si $\mu$ es un escalar, se tiene

   $$A(\mu X_1) = \mu AX_1 = \mu 0 = 0$$

   de donde se ve que $\mu X_1$ es también solución.
   Entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ que se llamará **espacio de soluciones** (o espacio solución) del sistema $AX = 0$.

**Teorema 1.** *Supongamos que el sistema no homogéneo de ecuaciones lineales*

$$\begin{gathered}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2\\ \cdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m\end{gathered}$$

*tiene al menos una solución $\overline{S}$, Supongamos también que el sistema homogéneo asociado tiene asociado el conjunto de soluciones S.*
*Entonces el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo S' se puede expresar como*

$$S' = \overline{S} + S$$

*Demostración.* Sea $\overline{S} = (\overline{s}_1, \overline{s}_2, ..., \overline{s}_n)$ una solución de (1) y $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ una solución de (2). Entonces $\overline{S} + S$ es solución de (1) pues

$$\begin{gathered}a_{11}(\overline{s}_1 + s_1) + a_{12}(\overline{s}_2 + s_2) + ... + a_{1n}(\overline{s}_n + s_n) = a_{11}\overline{s}_1 + a_{12}\overline{s}_2 + ... + a_{1n}\overline{s}_n + a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + ... + a_{1n}s_n = b_1 + 0\\ a_{21}(\overline{s}_1 + s_1) + a_{22}(\overline{s}_2 + s_2) + ... + a_{2n}(\overline{s}_n + s_n) = a_{21}\overline{s}_1 + a_{22}\overline{s}_2 + ... + a_{2n}\overline{s}_n + a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + ... + a_{2n}s_n = b_2 + 0\\ \cdots\\ a_{m1}(\overline{s}_1 + s_1) + a_{m2}(\overline{s}_2 + ... + a_{mn}(\overline{s}_n + s_n) = a_{m1}\overline{s}_1 + a_{m2}\overline{s}_2 + s_2 + ... + a_{mn}\overline{s}_n + a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + ... + a_{mn}s_n = b_m + 0\end{gathered}$$

□

Este teorema sirve para describir convenientemente al conjunto de soluciones de un sistema. En efecto, basta dar un vector $\overline{S}$ (una slolución particular de (1)) y un subespacio S (el de soluciones de (2)).
Todas las soluciones del sistema son entonces de la forma $\overline{S} + S$.

**Ejemplo** Considere el sistema

$$\begin{gathered}2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0\\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 1\\ 2x_1 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -6\\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + x_5 = -2\end{gathered}$$

que se puede expresar como producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -4 & 2 & 2\\ 1 & -5 & -7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -6\\ -2 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 & 0\\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -4 & 2 & 2 & -6\\ 1 & -5 & -7 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo asociado

$$\begin{gathered}2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0\\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 0\\ 2x_1 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0\\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + x_5 = 0\end{gathered}$$

que se puede expresar como producto de matrices

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & -7 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -4 & 2 & 2\\ 1 & -5 & -7 & 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Al usar eliminación Gaussiana en esta última, se obtiene

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & -7 & 5 & 2 & 0\\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -4 & 2 & 2 & -6\\ 1 & -5 & -7 & 6 & 1 & -2\end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales equivalente al homogéneo inicial es entonces

$$\begin{gathered}x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0\\ x_2 + x_3 - x_4 = 0\end{gathered}$$

Las variables independientes serán $x_3,\ x_4,\ x_5$ y para las variables dependientes se tiene

$$\begin{aligned}x_1 &= 2x_3 - x_4 - x_5\\ x_2 &= -x_3 - x_4\end{aligned}$$

Dando los siguientes valores a $x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$, $x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0$ y $x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1$ obtenemos una base

$$\begin{aligned}\overline{s}_1 &= (2, -1, 1, 0, 0)\\ \overline{s}_2 &= (-1, 1, 0, 1, 0)\\ \overline{s}_3 &= (-1, 0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

por lo que

$$S = \{\alpha\overline{s}_1 + \beta\overline{s}_2 + \gamma\overline{s}_3 \mid \alpha,\ \beta\ \gamma \in \mathbb{R}\}$$

El sistema de ecuaciones lineales equivalente al sistema no homogéneo inicial es entonces

$$\begin{gathered}x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -3\\ x_2 + x_3 - x_4 = -2\end{gathered}$$

Considerando $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, obtenemos $x_1 = -3$ y $x_2 = -2$, por lo que $(-3, -2, 0, 0, 0)$ es una solución particular del sistema y por lo tanto el conjunto S de todas las soluciones de éste está dado por

$$S' = \{(-3, -2, 0, 0, 0) + \alpha\overline{s}_1 + \beta\overline{s}_2 + \gamma\overline{s}_3 \mid \alpha,\ \beta\ \gamma \in \mathbb{R}\}$$